



**Titre:** Optimisation des ateliers de fabrication flexibles sous une  
Title: commande à seuils critiques

**Auteur:** Sami El-Férik  
Author:

**Date:** 1996

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** El-Férik, S. (1996). Optimisation des ateliers de fabrication flexibles sous une  
Citation: commande à seuils critiques [Thèse de doctorat, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8957/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8957/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**

**OPTIMISATION DES ATELIERS DE FABRICATION FLEXIBLES  
SOUS UNE COMMANDE À SEUILS CRITIQUES**

**SAMI EL-FÉRIK**

**DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE  
INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE  
PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
SEPTEMBRE 1996**

© Sami El-Férik, 1996



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26419-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

OPTIMISATION DES ATELIERS DE FABRICATION FLEXIBLES SOUS UNE  
COMMANDE À SEUILS CRITIQUES

présentée par: EL-FÉRIK Sami  
en vue de l'obtention du diplôme de: PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. Richard Loulou Ph.D., Président-rapporteur

M. Roland Malhamé, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. El-Kébir Boukas, Ph.D., membre et co-directeur de recherche

Mme. Brunilde Sanso, Ph.D., membre

M. Ravi Mazumdar, Ph.D., membre



## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, le professeur Roland P. Malhamé, pour sa vision scientifique très claire dont j'ai bénéficié tout au long de cette thèse et pour son encadrement modèle qui a su m'éviter bien des écueils et m'orienter vers des sujets aussi intéressants que porteurs. Notre interaction étudiant chercheur/directeur a été optimale et je crois que quel que soit le choix des mots je ne saurais lui exprimer ma gratitude. Je lui suis redevable pour la confiance qu'il m'a témoignée, pour tout le temps qu'il a consacré à cette recherche ainsi que pour le support financier qu'il m'a accordé.

Je désire aussi remercier mon co-directeur M. El-Kébir Boukas pour l'aide qu'il m'a toujours offerte, pour ses conseils et commentaires pertinents et pour l'aide financière qu'il m'a accordée.

Je souhaite remercier les membres du jury, M. Richard Loulou, Mme. Brunilde Sanso et M. Ravi Mazumdar, pour avoir accepté d'évaluer cette thèse.

J'aimerais remercier tout les professeurs de la section automatique pour le climat de famille qu'ils ont su maintenir et favoriser. En particulier, Je remercie M. Romano M. Desantis ainsi que M. Richard Hurteau pour la confiance qu'il m'ont accordée tout au long de mon séjour à Polytechnique en me donnant diverses responsabilités d'enseignement.

Je remercie aussi:

- M. Yves Léonard et M. Richard Grenier, techniciens à la section automatique pour leur dévouement à nous fournir en tout temps les outils nécessaires à l'avancement de nos activités d'enseignement et de recherche.
- M. Patrick Timmons analyste de réseau au département de génie électrique et génie informatique pour son support technique et sa disponibilité pour tout ce qui touche les problèmes majeurs du réseau informatique local.

À tous mes collègues de la section ainsi qu'à tous mes partenaires de l'association des étudiants des cycles supérieurs je vous dis merci pour votre agréable soutien.

Enfin, ma plus grande gratitude va à ma future épouse, Mlle Nehla Lejmi, qui par sa patience, ses attentions continuelles, son amour et son encouragement continuel a su rendre le temps court et transformer ce qui est difficile en simple et facile.

## RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème général de contrôle de flux dans les ateliers de fabrication flexibles. La thèse est composée de deux parties principales consacrées respectivement à la commande sous-optimale sur horizon fini des ateliers de fabrication mono-pièce, et la commande sous-optimale sur horizon infini des ateliers de fabrication multi-pièce. Plus précisément, dans la première partie, le problème de production sur horizon fini dans un atelier mono-pièce est considéré. Lorsque le taux de demande de pièces est constant, pour une fonction coût d'inventaires ou de retards de production par unité de temps convexe, il est établi que les politiques de production optimale sont de type seuils critiques. Pour un horizon de commande infini, ces politiques sont caractérisées par un ensemble de seuils d'inventaires critiques associés à chaque mode de la machine pour lequel le taux de demande peut être satisfait et qu'il s'agit de maintenir lorsque possible. Dans le cas d'un horizon fini (commande transitoire), les seuils critiques existent toujours mais varient dans le temps, et de ce fait deviennent des courbes critiques, en général très difficiles à caractériser. Dans un effort de simplification, la commande transitoire optimale pour ateliers de fabrication mono-pièce est recherchée à l'intérieur de la classe (sous-optimale) des politiques à seuils critiques invariants. Une équation de renouvellement est développée pour la fonctionnelle coût sur horizon fini sous une loi de commande arbitraire de type de seuil critique invariant. Le noyau de l'équation de renouvellement correspond à une fonction de densité de probabilité de premier temps de retour obtenue comme solution d'un système auxiliaire d'équations aux dérivées partielles (EDP). Le système auxiliaire d'EDP ainsi que l'équation de renouvellement sont ensuite conjointement utilisés pour générer récursivement les termes d'une série infinie correspondant à l'expansion de la transformée de Laplace (par rapport à la longueur d'horizon  $T$ ) de la fonctionnelle coût. Les termes de l'expansion sont utilisés pour obtenir un approximant de Padé fournissant après inversion une très bonne approximation de la valeur de

la fonctionnelle coût pour un choix donné de  $T$  et des seuils d'inventaires critiques. Ce schéma d'approximation est par la suite utilisé à l'intérieur d'un algorithme d'optimisation numérique à partir duquel les niveaux d'inventaires optimaux pour une longueur d'horizon donnée sont optimaux. La même technique d'optimisation peut être envisagée dans le contexte multi-pièce si les politiques de production sont de type seuils critiques constants avec découplage de la politique de production pour chaque type de pièce (utilisation d'hypercubes inscrits pour l'approximation de l'espace de capacité de production de Caramanis et Sharifnia).

Dans la deuxième partie de la thèse, nous considérons le cas de systèmes de production à deux modes, multi-pièce. Bien que les politiques sous-optimales de Caramanis et Sharifnia soient intéressantes au niveau de la simplicité des calculs en cause, elles présentent le désavantage important que les seuls hypercubes souscrits dans l'espace de capacité permis sont ceux pour lesquels le niveau de production maximal pour chaque type de pièce est en moyenne suffisant pour répondre à la demande individuelle pour ce type de pièce (demande "faisable"). Il est également à noter que le caractère totalement découplé des politiques de production pour chaque type de pièce fait en sorte que même l'utilisation du sous-espace de production réduit est sous-optimale. Une classe de politique de production basée sur des hypercubes inscrits dans l'espace de capacité est introduite. ces politiques dites politiques maximales simples à points critiques (politiques MSP), sont telles que les niveaux de production pour chaque type de pièce sont couplés, l'exigence de faisabilité pour chaque composante de l'hypercube inscrit est éliminée, et il n'y a jamais sous-utilisation de la capacité de production. En se fondant sur les techniques développées dans la première partie de la thèse, il est alors possible de montrer que pour un système avec  $p$  types de pièces, des fonctionnelles coûts additives pour chaque type de pièce, l'analyse de performance d'une politique MSP donnée se réduit à l'analyse de  $p$  machines (fictives) semi-markoviennes découplées. Les machines sont markovianisées moyennant une analyse de premier temps de passage ainsi que l'application d'une technique d'approximants de Padé. L'optimisation numérique sur la classe de politiques MSP indique que, du moins pour l'exemple

numérique étudié, leur performance est éminemment comparable à celle de la commande optimale.

## ABSTRACT

In this thesis we address the flow control problem in manufacturing systems. The thesis consists of two main parts respectively corresponding to finite horizon suboptimal control of single part manufacturing systems, and infinite horizon suboptimal control of multi-part manufacturing systems. More specifically, in the first part, Part production is considered over a finite horizon in a single part multiple failure state manufacturing system. When the rate of demand for parts is constant, for Markovian machine mode dynamics and for convex running cost functions associated with part inventories or backlogs, it is known that optimal part production policies are of the so-called hedging type. For the infinite horizon case, such policies are characterized by a set of constant critical machine mode dependent inventory levels that must be aimed at and maintained whenever possible. For the finite horizon (transient) case, the critical levels still exist but they are now time-varying and in general very difficult to characterize. Thus, in an attempt to render the problem tractable, transient production optimization is sought within the (suboptimal) class of time-invariant hedging control policies. A renewal equation is developed for the cost functional over finite horizon under an arbitrary time-invariant hedging control policy. The kernel of that renewal equation is a first return time probability density function which satisfies an auxilliary system of Kolmogorov type of partial differential equations (PDE). The renewal equation and the auxilliary PDE system are used to generate recursively the terms of an infinite series expansion of the Laplace transform (with respect to horizon length) of the resulting cost functional. Padé approximants to the resulting infinite series expansion yield a *quite accurate* approximations of the cost functional in terms of  $T$  and the arbitrary hedging levels. This is subsequently used as part of an optimization scheme whereby hedging levels which are optimal for a given finite horizon length are efficiently computed. The algorithms presented here can also be applied to the finite horizon optimization for multi-parts failure-prone manufacturing systems provided that only the part-

wise decoupled capacity set inscribed hypercube-based hedging control policies are considered (Caramanis and Sharifnia) .

In the second part of the thesis, we consider the case of the two-state multi-part manufacturing systems. The near optimal controllers of Caramanis and Sharifnia, while computationally attractive, suffer from the drawback that the production capacity set must be approximated via a very restricted set of inscribed hypercubes, namely those for which a componentwise feasibility requirement is satisfied. Also, due to the completely decoupled nature of production along each component, even the utilization of the restricted capacity set is suboptimal. A class of capacity set inscribed hypercube policies called simple maximal hedging (SMH) policies is introduced. In SMH policies production along the various components of the capacity set are coupled, the componentwise feasibility requirement is lifted, and there is no underutilization of production capacity if needed. Using the results of the first part of the thesis, in a  $p$  part types manufacturing system, for partwise additive cost functionals, it is shown that performance evaluation of a given SMH policy reduces to the analysis of  $p$  decoupled (fictitious) semi-Markovian machines. The machines are Markovianized via first passage-time analysis and a Padé approximants technique. Numerical optimization over the class of SMH policies in a sample manufacturing system indicate that their performance can come close to that of the optimal control.

# TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	xv
LISTE DES SYMBOLES . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xviii
1 INTRODUCTION.....	1
2 NOTIONS SUR LES ATELIERS DE FABRICATION FLEXI- BLES.....	11
2.1 Définition d'un atelier de fabrication flexible . . . . .	11
2.1.1 Décomposition hiérarchique . . . . .	14
2.2 Problème de contrôle de flux . . . . .	17
2.2.1 Formulation du problème . . . . .	17
2.2.2 Caractérisation de la politique optimale et notion de point critique d'inventaire (Hedging point) . . . . .	20
2.3 Optimisation des seuils critiques: cas mono-pièce . . . . .	23
2.3.1 Cas d'un coût actualisé . . . . .	23



2.3.2	Calcul des densités de probabilités stationnaires d'un système à deux états soumis à une politique à seuils critiques . . . .	25
2.3.2.1	Extension de la méthode de Bielecki-Kumar . . . .	27
2.4	Optimisation des seuils critiques: cas multi-pièce . . . . .	29
2.5	Importance de l'analyse transitoire . . . . .	30
2.6	Conclusion . . . . .	32
<b>3</b>	<b>CARACTÉRISATION DES STATISTIQUES TRANSITOIRES ET CRITÈRES D'ERGODICITÉ.....</b>	<b>33</b>
3.1	Hypothèses de base et formulation du problème . . . . .	33
3.1.1	Critère d'ergodicité . . . . .	39
3.2	Exemple d'application . . . . .	41
3.3	Conclusion . . . . .	45
<b>4</b>	<b>UTILISATION DES APPROXIMANTS DE PADÉ POUR L'ANALYSE TRANSITOIRE.....</b>	<b>47</b>
4.1	Formulation du problème . . . . .	48
4.2	Méthode des courants de probabilité et calcul des fonctions de densité du premier temps de retour . . . . .	50
4.3	Équation de renouvellement du coût . . . . .	52
4.4	Les approximants de Padé pour l'estimation de $C_i(s)$ . . . . .	58
4.5	Estimation du temps de convergence vers le régime stationnaire par l'analyse des singularités . . . . .	58
4.5.1	Caractérisation des pôles . . . . .	59

4.5.2	Caractérisation des points de branchements . . . . .	60
4.6	Conclusion . . . . .	62
	ANNEXE I: DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.3 . . . . .	64
	ANNEXE II: "Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing" . . . . .	68
	ANNEXE III: "Optimizing the Transient Behavior of Hedging Control Policies in Manufacturing Systems" . . . . .	120
<b>5</b>	<b>POLITIQUES MAXIMALES SIMPLES À SEUILS CRITIQUES</b>	<b>128</b>
5.1	Formulation du problème . . . . .	129
5.2	Existence et caractérisation des politiques maximales simples consis- tantes . . . . .	132
5.2.1	Politiques maximales consistantes . . . . .	132
5.2.2	Caractérisation de la politique de production . . . . .	133
5.2.3	Cas générique: machine maître et machine esclave . . . . .	133
5.3	Approximation du processus d'inventaire de pièces pour la machine esclave . . . . .	135
5.3.1	Construction de la version biaisée du processus . . . . .	135
5.4	Critère d'ergodicité pour le cas multi-pièces . . . . .	138
5.5	Conditions d'optimalité du niveau d'inventaire nul (just-in-time) . .	139
5.6	Conclusion . . . . .	141
	ANNEXE IV: A Tractable Class of Maximal Hedging Policies in Multi- Part Manufacturing Systems . . . . .	142

6 CONCLUSION .....	184
RÉFÉRENCES	189

## LISTE DES FIGURES

2.1	Décomposition hiérarchique pour répondre aux pannes aléatoires telle que suggérée par Kimemia et Gershwin . . . . .	16
2.2	Exemple de variation de l'espace de capacité en fonction des différents modes de l'atelier . . . . .	19
2.3	Division de l'espace de production en différentes régions à taux de production constants. . . . .	23
2.4	Les désavantages du contrôleur sous-optimal suggéré par Caramanis et Sharifnia . . . . .	30
3.1	Représentation géométrique des politiques à points critiques pour un système ayant $n$ états dont $m$ sont faisables . . . . .	35
3.2	Exemple de réalisation des événements $j^{(i)}$ . . . . .	37
3.3	Réalisation correspondante du processus de renouvellement markovien $Y(t)$ . . . . .	37
3.4	Solution en régime stationnaire du système d'équations aux dérivées partielles décrivant les fonctions de densités de probabilité (théorèmes 3.1) . . . . .	43
3.5	Dynamique de $P_{z_1}(t)$ illustrant la borne maximale moyenne du temps de convergence vers le régime stationnaire . . . . .	45
5.1	Application de la politique MSP dans le cas d'un système à deux modes produisant deux types de pièces . . . . .	131

## LISTE DES SYMBOLES

- $P[.]$  : opérateur probabilité  
 $E[.]$  : opérateur espérance  
 $[.]'$  : opérateur transposée  
 $T$  : horizon de planification  
 $T_{r_i}$  : temps du premier retour de la pièce  $i$   
 $p$  : nombre de pièces produites par l'atelier  
 $x(t)$  : vecteur de variables continues représentant le surplus de pièces  
 $\tilde{x}_i(t)$  : processus d'inventaire biaisé associé à la pièce  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$   
 $u_{\alpha i}$  : taux de production de la pièce  $i$  quand le système est au mode  $\alpha$   
 $d(t)$  : vecteur de taux de demande pour les pièces  
 $\Omega_\alpha$  : polyèdre convexe représentant l'ensemble des commandes admissibles  
 $\partial\Omega_\alpha$  : frontière supérieure de  $\Omega_\alpha$   
 $z_i$  : seuil critique d'inventaire associé au mode faisable  $i$ ,  
 $c^+$  : facteur de pénalité quand le surplus est positif,  
 $c^-$  : facteur de pénalité quand le surplus est négatif,  
 $\ell(x)$  : fonction additive représentant le coût instantané,  
 $V_i$  : matrice diagonale des vitesses de production

- $f_i(x, t)dx$  :  $P [x < x(t) < x + dx, \alpha(t) = i]$
- $P_{z_i}$  : masse de probabilité au point critique  $z_i$
- $g_{ii}(t)$  : fonction de densité de probabilité du premier temps  
de retour à l'état de régénération  $i$  ( $[z_i, i]$ )
- $C_\infty$  : coût stationnaire
- $C_i(T)$  : coût sur horizon fini avec état de régénération  $i$
- $\alpha(t)$  : variable discrète représentant les différents modes du système
- $\tilde{\alpha}_i(t)$  : machine semi-markovienne fictive à deux modes
- $\tilde{d}_i$  : taux de variation équivalent pour la machine esclave
- $c$  : point nominal appartenant à  $\partial\Omega_\alpha$  représentant un choix  
particulier des taux de production
- $u_\alpha^x$  : vecteur de production nominale caractérisant le point  $c$
- $u_{\alpha \max}^c$  : taux de production maximal pour la pièce  $i$  imposé par  
le choix du point nominal  $c$  quand le système est au mode  $\alpha$

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I: DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.3 . . . . .	64
ANNEXE II: “Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing” . . . . .	68
ANNEXE III: “Optimizing the Transient Behavior of Hedging Control Policies in Manufacturing Systems” . . . . .	120
ANNEXE IV: A Tractable Class of Maximal Hedging Policies in Multi- Part Manufacturing Systems . . . . .	142

## CHAPITRE I

# INTRODUCTION

Dans un contexte de libéralisation des marchés, l'optimisation de tous les aspects du processus de fabrication devient un impératif pour les compagnies manufacturières. L'objectif ultime est de demeurer compétitif au niveau de la qualité tout en répondant à la demande avec les coûts les plus bas possible dans un contexte de capacité de production restreinte. La robotisation et l'informatisation industrielles en général gagnent donc du terrain. À ce sujet, l'atelier de fabrication flexible constitue le moyen technologique le plus avancé. Il s'agit cependant d'une technologie très coûteuse et dont il faut essayer d'assurer la rentabilité.

L'objectif d'un atelier de fabrication flexible est de satisfaire, au coût le plus bas, les exigences d'une demande, qui peut varier dans le temps, tout en réduisant le niveau de surplus de production qui pourra être positif ou négatif. Un surplus positif correspond à l'existence d'un inventaire et une demande satisfaite; par contre un surplus négatif reflète l'état d'un stock épuisé et d'une demande non respectée. Les différents problèmes qui surgissent lors du fonctionnement d'un atelier de fabrication flexible, incluent les décisions qui régissent la planification et l'ordonnancement de la production, l'injection et le chargement de la matière première ainsi que l'acheminement des pièces à l'intérieur de l'atelier. Dans ce qui suit nous passons en revue le segment de la littérature scientifique auquel se rattachent directement les travaux de recherche dans cette thèse.

Olsder et Suri [4] sont les premiers à formuler un modèle de contrôle stochastique basé sur les résultats de Rishel [21] concernant la théorie de contrôle des systèmes markoviens à sauts. En utilisant l'approche de la programmation dynamique, ils traitent le problème d'acheminement des tâches dans l'atelier comme un problème de commande optimale en temps minimal. La loi de commande qu'ils



trouvent en utilisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, est la solution d'un système complexe d'équations fonctionnelles intercouplées résultant du principe d'optimalité de Bellman. Ils mentionnent la difficulté d'obtenir des solutions analytiques et proposent d'autres approches approximatives essentiellement numériques. Toutefois, ils montrent que l'espace de production est divisé en plusieurs régions et la décision optimale est déterminée par la région où se situe le niveau d'inventaire global.

Les caractéristiques qualitatives du contrôle optimal pour la minimisation du niveau d'inventaire ont été étudiées par Kimemia et Gershwin [7]. Dans [7], une décomposition hiérarchique spécifiquement conçue pour pouvoir tenir compte de manière efficace du problème des pannes aléatoires de machines, permet d'approximer, à un certain niveau de décision, la dynamique du processus de production par un modèle fluide (variables continues). Cette dynamique est ponctuée de sauts brusques et généralement aléatoires dans la capacité de production ou dans la demande. Ces sauts sont dus aux changements de l'état opérationnel de l'atelier (panne, arrêt d'entretien...). L'analyse fondée sur un tel modèle permet de conclure sous certaines circonstances que la politique de production optimale sur horizon infini se caractérise par des niveaux d'inventaire critiques. Chaque mode de l'atelier (panne partielle) *faisable*, c'est à dire un mode où on peut produire à un taux égal ou supérieur au taux de la demande, possède son propre niveau. La stratégie de production optimale consiste alors à s'organiser de sorte à atteindre le niveau critique associé au mode faisable actuel le plus rapidement possible et d'y demeurer tant que l'état de l'atelier le permet. Kimemia et Gershwin mentionnent la difficulté d'obtenir une expression analytique exacte de la solution optimale. En effet, la solution exacte de ce problème de contrôle de la production exige la solution d'un système d'équations différentielles qui n'est possible que dans des cas simples scalaires (mono-pièce); ce n'est pas la situation pour les ateliers de fabrication flexibles qui sont en général multi-dimensionnels (multi-pièce). Pour contourner cette difficulté, Kimemia et Gershwin [7] proposent une heuristique qui permet de calculer des lois de contrôle sous-optimales plus simples et plus pratiques.

Dans le cas mono-pièce, Akella et Kumar [16] réussissent à trouver une expression analytique pour le calcul du point d'inventaire optimal. Le système qu'ils considèrent est formé d'une machine à deux états, état opérationnel et état de panne respectivement, et produit un seul type de pièces. La fonction de pénalité  $\ell(x(t))$  est linéaire par rapport au niveau d'inventaire  $x(t)$  considérée comme une variable continue. Akella et Kumar démontrent à partir d'une analyse de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante, que dans ce cas la politique optimale de contrôle satisfait la stratégie suivante:

$$\pi_{z^*}(x(t)) = \begin{cases} u_{1\max} & \text{si } x(t) < z^* \\ d & \text{si } x(t) = z^* \\ 0 & \text{si } x(t) > z^* \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $z^*$  représente le point d'inventaire optimal. Sous cette politique à point critique, le taux de production varie selon le lieu où l'état continu du système  $x(t)$  se trouve par rapport à  $z^*$ . L'objectif est de rejoindre ce point le plus rapidement possible en produisant à un taux maximal ou en arrêtant la production selon que  $x(t) < z^*$  ou  $x(t) > z^*$  respectivement. Une fois ce point atteint (i.e.,  $x(t) = z^*$ ), le système y reste tant que l'état discret le permet. Akella et Kumar montrent que la condition nécessaire à l'optimalité de cette politique est reliée directement à la convexité de la fonction valeur par rapport à ses entrées. La convexité du coût instantané assure la convexité du coût résiduel. Cependant, même pour le cas le plus élémentaire d'un système à deux états, l'analyse de l'équation de la programmation dynamique s'avère compliquée.

Partant de la constatation que l'analyse de l'équation de la programmation dynamique permet de conclure que la loi de commande optimale est une loi à seuil critique, Bielecki-Kumar transforment le problème de recherche de commande optimale sur horizon infini en un problème beaucoup plus simple d'optimisation paramétrique sur l'ensemble des lois à seuils critiques d'inventaires. Bielecki et Kumar [27] initient une nouvelle approche qui se comportant quatre étapes:

- considérer l'ensemble des stratégies de commande à seuil critique tel que décrit par l'équation (1.1);

- choisir un niveau critique  $z$  arbitrairement (paramètre définissant de manière non équivoque la stratégie de production);
- calculer lorsqu'elles existent les fonctions de densités de probabilité stationnaires décrivant les statistiques de  $x(t)$  (le niveau du stock), sous l'action de la loi de commande à seuil critique ainsi paramétrisée;
- calculer le coût (indice de performance) en fonction de  $z$ ;
- optimiser le choix de  $z$  de manière à minimiser le coût.

Ils reconsidèrent le problème traité dans [16], d'une machine à deux états. Seul le critère de minimisation a changé. En effet, au lieu d'utiliser comme critère d'optimisation l'intégral d'un coût avec facteur d'escompte ( $\exp(-\rho t)$ ), ils utilisent cette fois-ci le critère du coût moyen par unité de temps sur un horizon infini. En utilisant les conditions d'optimalité données par des équations de la programmation dynamique, ils démontrent par procédure de vérification que la loi de production de type à seuils critiques est effectivement optimale.

L'approche proposée par Bielecki et Kumar s'avérait simple et prometteuse et devait devenir le point de départ de plusieurs autres travaux (Algoet [1], Caramanis et Sharifnia [9], Sharifnia [25], etc.) Sharifnia [25] postule une structure à seuils critiques multiples de la loi optimale du problème mono-pièce avec machine à états multiples. Ainsi, l'espace de l'inventaire  $x(t)$  est divisé en plusieurs régions limitées par les seuils d'inventaire optimal dont le nombre est égal à celui des états faisables du système. Ces seuils sont classés en ordre décroissant (i.e.,  $z_i > z_j$  si  $i < j$ ). En faisant, l'équilibre du flux de probabilité passant à travers un élément d'espace de largeur  $\Delta x$ , Sharifnia [25] montre que les fonctions de densité de probabilité stationnaires lorsqu'elles existent, reliées à chaque état de la chaîne de Markov, modélisant l'état discret du système, sont solutions d'équations différentielles linéaires couplées par rapport à la variable continue  $x(t)$ .

Algoet [1] généralise l'approche de Bielecki et Kumar [27] ainsi que le

développement présenté par Sharifnia [25] pour l'étude et l'analyse des systèmes de production multi-mode multi-pièce. En faisant, l'équilibre de flux de probabilité à l'intérieur d'un élément de volume il montre que la densité de probabilité stationnaire du vecteur représentant conjointement le processus d'inventaire et l'état discret caractérisant les différents modes de l'atelier satisfait une équation aux dérivées *partielles*. De plus, Algoet mentionne que la projection du vecteur d'inventaire sur un axe quelconque possède aussi une densité de probabilité marginale qui satisfait le même style de système d'équations aux dérivées partielles. Dans le cas où les capacités de productions sur les différents axes (différents types de pièces) sont indépendantes le système d'équations aux dérivées partielles se réduit à un système différentiel ordinaire.

Partant sur l'idée proposée à l'origine dans [7], Caramanis et Sharifnia [9] proposent une approche sous-optimale de conception qui consiste à construire une famille d'approximations de l'espace de contrôle par des hypercubes souscrits. La loi de production qu'ils associent aux hypercubes souscrits, rend les dynamiques associées aux différents types de pièces *indépendantes*, ainsi un problème multidimensionnel de dimension  $p$  au départ est décomposé en  $p$  sous-problèmes scalaires indépendants. Cependant, toute forme de dépendance entre les lois de production associées aux différents types de pièces ayant été éliminée, le système n'est plus en mesure de fonctionner à plein régime (capacité maximale), notamment lorsqu'un des inventaires atteint son point critique.

Suite à ces travaux initiaux, les politiques à points critiques émergent donc comme étant les politiques optimales pour un horizon d'optimisation infini d'une fonctionnelle coût avec un coût instantané convexe. À partir de là, un nombre important de travaux est développé autour des propriétés des politiques de production à seuils critiques particulièrement dans le cas des systèmes markoviens produisant un seul type de pièces. Liberopoulos et Hu [5], Sethi et Zhang [24] se sont intéressés à l'ordre qui peut exister entre les seuils critiques pour un système à plusieurs états produisant un seul type de pièces. Se basant sur les équations de Hamilton-Jacobi-

Bellman, et pour les cas particuliers où la chaîne de Markov décrivant le mode de l'atelier constitue un processus de naissance et de mort, ils montrent que les seuils critiques respectent une certaine monotonie (plus la capacité de production dans un mode donné est importante, plus le seuil critique associé est faible).

Dans le cas multi-pièce, Srivatsan et Dallery [11] étendent les connaissances acquises pour le cas mono-pièce notamment en ce qui concerne l'analyse de stabilité et les conditions d'optimalité au cas à deux où plusieurs types de pièces. La technique utilisée est une combinaison de comparaison et d'analyse de trajectoires générées par différentes politiques de production. Srivatsan et Dallery montrent que ce type d'analyse permet d'aboutir à une caractérisation partielle des politiques de contrôle pour les systèmes à deux ou plusieurs types de pièces. Une propriété qui se révélera importante pour nos travaux émerge de leur analyse, voulant que pour la classe de politiques à seuils critiques où le système produit tout le temps, si besoins est au taux maximal, indépendamment du mode où il est, le temps que met le niveau d'inventaire pour revenir au point critique global est le même quel que soit le chemin particulier emprunté dans l'espace d'inventaire.

Pour des machines non markoviennes, Glasserman [14] étudie le problème des machines mono-pièce multi-mode, où le mode est semi-markovien. Glasserman considère que tous les seuils critiques sont agrégés en un seul point et obtient des résultats analytiques directement utiles lorsqu'il existe un seul état de panne avec temps de séjour exponentiel. Les résultats fondés sur un calcul de valeur propre maximale sont obtenus en exploitant le lien qui existe entre le processus d'inventaire et une marche aléatoire en temps continu dans un contexte semi-markovien. De plus, Glasserman présente, dans le cas de modes semi-markoviens quelconques, des seuils critiques asymptotiquement optimaux lorsque le coût pénalisant un inventaire négatif tend vers l'infini.

D'autre part, Brémaud, Malhamé et Massoulié [13] étudient les critères d'ergodicité de la fonction coût pour une machine mono-pièce multi-mode et de dynamique quelconque, mais ergodique, lorsque la loi de production est de type

seuils critiques. De plus, une technique de gradient stochastique, de même que des conditions garantissant la convergence de l'algorithme, sont développées pour l'optimisation par simulation des seuils critiques. Enfin, il est à noter qu'ils présentent des conditions nécessaires et suffisantes essentiellement identiques à celles de Bielecki et Kumar [27] (contexte markovien), pour l'optimalité des politiques juste à temps (seuil critiques nul) pour le cas mono-pièce avec mode ergodique.

La limitation majeure des travaux présentés précédemment est la nature restreinte des phénomènes qui y sont traités: les opérations et les pannes. Un atelier de fabrication flexible présente un catalogue d'événements plus riche incluant des temps de reconfiguration non négligeables, la maintenance préventive, les manques éventuels de matières premières, les absences occasionnelles du personnel... Également, le niveau du tampon n'est pas traité. Le modèle utilisé dans les travaux ci-dessus ne permet pas l'accumulation interne des pièces dont l'usinage est en cours.

La considération de tous ou de certains de ces phénomènes représente un problème difficile voir analytiquement impossible à résoudre. Pour éviter ces difficultés, des stratégies de nature heuristique sont alors mis de l'avant ([33], [34], [35], [36]). Le système généralement étudié est un atelier de fabrication composé d'une seule machine et produisant plusieurs types de pièces. Le temps de reconfiguration peut être non nul et la demande pour les produits est stochastique.

Une autre limitation de cette littérature vient du fait que l'on met énormément d'emphasis sur la caractérisation de la solution optimale en régime stationnaire. Cependant, aucune caractérisation du temps de stabilisation ou de façon équivalente de la vitesse de convergence vers le régime stationnaire n'a été abordée. En effet, en pratique, la majorité des décisions dans un atelier de fabrication sont à moyen ou à court terme afin de permettre une adaptation rapide à une demande qui peut varier dans le temps. La détermination du temps de convergence vers le régime stationnaire peut alors nous informer sur la longueur d'horizon minimale à partir de laquelle il devient raisonnable d'utiliser la solution en régime permanent. En

deçà de cette longueur d'horizon, la solution stationnaire n'est plus très fiable; or, il y a une absence quasi-totale de résultats concernant la commande sur horizon fini. La raison sous-jacente à ce manque d'information est la difficulté maintes fois exprimée de traiter ces questions.

À ce sujet les seuls travaux, à notre connaissance, qui ont constitué une première tentative sont ceux de Malhamé et Boukas [19] ainsi que Zhang et Yin [15].

Malhamé et Boukas [19], présentent une caractérisation de la dynamique transitoire des fonctions de densité de probabilité, décrivant l'évolution de la variable  $x(t)$ . De plus, Ils mettent en évidence le caractère de renouvellement de la dynamique de processus contrôlé. Les résultats obtenus permettent non seulement de caractériser le comportement transitoire et stationnaire des statistiques de probabilité rejoignant ainsi les travaux de Sharifnia et d'Algoet, mais aussi de dériver plusieurs propriétés statistiques reliées au processus hybride  $\{x(t), \alpha(t)\}^t$ , telles que le temps de séjour dans une région quelconque, les premiers temps de passage etc. De plus dans [10] l'ergodicité des politiques de commande à seuils critiques est étudiée pour les systèmes multi-mode produisant un seul type de pièce. Trois critères de vérification simples de l'ergodicité du système sont aussi établis.

Dans le cas d'un horizon fini, les niveaux critiques existent toujours mais varient dans le temps et sont en général difficiles à caractériser [15]. Afin de caractériser les seuils critiques sur horizon fini, Zhang et Yin [15] ont cherché à résoudre les équations de la programmation dynamique qui apparaissent comme des conditions d'optimalité de telles politiques. Les points critiques d'inventaire deviennent variant dans le temps et sont appelés courbes critiques. Zhang et Yin [15] présentent une solution analytique du problème de contrôle transitoire pour le cas d'une machine mono-pièce à deux états où *l'état de panne constitue un état absorbant*. Une variation du problème a été aussi traitée dans le cas d'une machine mono-pièce ayant une capacité constante et une demande markovienne à deux états dont l'un est absorbant avec valeur de demande nulle.

Notre objectif dans cette thèse est de répondre à trois questions. Les deux premières concernent les ateliers mono-pièces, alors que la troisième concerne les ateliers multi-pièces. Les questions sont les suivantes:

- Quelle doit être la plus petite valeur de la longueur de l'horizon  $T$  à partir de laquelle on peut utiliser avec un certain degré de confiance la politique optimale stationnaire?.
- Pour la classe de politiques à seuils critiques *invariants*, comment peut-on optimiser les seuils critiques d'inventaire sur un horizon fini et comment sont-ils affectés par la longueur de l'intervalle d'optimisation?.
- Comment peut-on améliorer le contrôleur sous-optimal de Caramanis et Sharifnia dans le cas d'un atelier de fabrication flexible produisant plusieurs types de pièces?.

En effet, nous considérons pour les deux premières questions un atelier de fabrication flexible multi-mode produisant un seul type de pièce et soumis à la classe de politiques à seuils critiques invariants mais dépendants de la longueur de l'horizon. Nous montrons que la fonctionnelle coût obéit à une équation de renouvellement caractérisée par la fonction de densité de probabilité du premier temps de retour au seuil critique. De plus, un système auxiliaire d'équations différentielles permet d'obtenir récursivement les approximations de Padé pour la fonctionnelle coût en fonction des seuils critiques. Par la suite, une optimisation numérique est menée afin de déterminer les seuils optimaux. Notons qu'en utilisant le contrôleur sous-optimal de Caramanis et Sharifnia ces résultats peuvent être appliqués pour le cas des systèmes multi-mode multi-pièce puisque les lois de commande de Caramanis et Sharifnia sont découplées d'un type de pièces à l'autre.

Pour la troisième question nous considérons un système produisant  $p$  types de pièces et pouvant être dans deux modes: opération normale et panne. L'analyse est confinée à la classe de politiques à seuils critiques invariants pour laquelle la capacité



maximale de production de l'atelier est utilisée en autant qu'elle soit nécessaire (déficit par rapport aux seuils d'inventaires critiques). L'espace de production est alors divisé en plusieurs régions. Ces régions sont telles que le processus d'inventaire est contraint de visiter les seuils critiques de divers types de pièces dans un ordre fixe. Les résultats développés dans la première partie ainsi que les techniques de markovianisation par les approximants de Padé ont rendu la caractérisation du coût et des points critiques d'inventaire possible.

Ainsi cette thèse comporte les chapitres suivants. Au chapitre II, nous définissons l'atelier de fabrication flexible, ses avantages ainsi que les aléas qui viennent compliquer l'optimisation de son fonctionnement. Nous présentons la structure hiérarchique d'analyse des ateliers de fabrication développée par Kimemia et Gershwin [7]. Enfin une description du contrôleur sous-optimal proposé par Caramanis et Sharifnia [9] est présentée. Elle sera utile au chapitre V. Au chapitre III, nous rapportons les résultats les plus importants de [19] et [10] qui ont servi aux développement des résultats du chapitre IV. En effet, ces deux articles constituent la base immédiate de notre contribution. Aux chapitres IV et V, nous présentons l'essentiel de notre contribution. Chaque chapitre commence par reprendre les résultats importants et donne un aperçu des hypothèses de base et des concepts importants. L'article intitulé "Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing " constitue la référence principale du chapitre IV. Notons cependant, que l'analyse des singularités pour caractériser la vitesse de convergence vers le régime stationnaire présentée à la fin de ce chapitre ne figure pas dans l'article et constitue un développement à part. L'article de conférence intitulé "Optimizing the Transient Behavior of Hedging Control Policies in Manufacturing Systems" présenté à l'annexe III de ce chapitre donne un exemple d'utilisation de l'analyse des singularités pour l'optimisation des seuils critiques sur horizon fini. L'article intitulé "A Tractable Class of Maximal Hedging Policies in Multi-Part Manufacturing Systems " constitue la référence principale du chapitre V. Dans le chapitre VI nous présentons nos conclusions et proposons des extensions possibles à nos recherches.

## CHAPITRE II

# NOTIONS SUR LES ATELIERS DE FABRICATION FLEXIBLES

### 2.1 Définition d'un atelier de fabrication flexible

Un atelier de fabrication flexible est constitué de plusieurs stations de travail permettant plusieurs types d'opérations. Un mécanisme de transport assure la liaison entre ces stations. L'atelier produit une famille de pièces avec des caractéristiques d'usinage présentant de grandes similarités ou qui encore constituent les composantes d'un même produit final une fois assemblées. Les pièces sont introduites dans le système à une station de chargement et le quittent à une station de déchargement. Au cours de son parcours, une pièce subit une séquence d'opérations bien définie. La flexibilité de l'atelier réside dans le fait que les opérations peuvent être effectuées sur une séquence arbitraire de pièces, avec des temps de réajustement et de réglage relativement courts d'un type de pièce à l'autre. De plus, une ou plusieurs stations peuvent être choisies pour chaque type d'opération. Ceci fait en sorte que la production est continue même si une des stations de travail est hors service à cause d'une panne ou pour fin de maintenance, et que le type de production peut être modifié au besoin relativement rapidement [22].

Le temps requis pour établir la configuration nécessaire pour une famille de pièces est de plus en plus négligeable grâce à des machines à commande numérique. Ces types de machines possèdent un magasin d'outils nécessaires aux différentes opérations qu'elles permettent de réaliser et sont presque autonomes. De plus, la robotisation étroitement couplée à un développement informatique sans cesse croissant fournissent une plus grande efficacité et rapidité lors de l'établissement de la configuration et le calibrage de départ. Dans la majorité des cas, un logiciel détermine la séquence des opérations ainsi que les ajustements nécessaires d'une

opération à une autre ou d'un type de pièce à l'autre. Le changement dans les lignes du code ou du logiciel peut se faire de façon instantanée comparativement au temps nécessaire pour effectuer les différentes opérations.

La diversité des domaines d'application de cette technologie, qui autrefois était réservée aux très grandes compagnies, intéresse de nos jours de plus en plus de moyennes et petites entreprises. La capacité qu'un atelier flexible fournit de produire simultanément une famille de pièces, de réduire le stock de produits, d'éliminer la congestion et de diminuer le retard, procure donc une rapidité de réponse à une variation de la demande tant au niveau de la quantité que de la qualité. Cette capacité de réponse à une variation de la demande représente un atout très important pour une compagnie cherchant à demeurer compétitive dans un marché libre.

L'atelier de fabrication flexible représente par ailleurs un investissement élevé et par conséquent il est vital, lorsque l'investissement a été fait, de pouvoir utiliser efficacement cette technologie.

Pour atteindre cet objectif de rentabilité, une modélisation et une analyse du fonctionnement des ateliers devraient être effectuées. Cependant, la majorité des systèmes de fabrication sont des systèmes à grande échelle et complexes. De plus ces systèmes sont sujets à des événements qui peuvent être de nature stochastiques ou déterministes. Parmi, ces événements on peut citer ([22], chap.9):

- pannes ou réparations des machines
- modifications subites des plans de production
- manque imprévu de matière première

Une reconnaissance rapide des événements cités plus hauts ainsi qu'une politique d'action en conséquence représentent des exigences incontournables. Vu la diversité des problèmes, l'obtention de politiques optimales basées sur un seul modèle mathématique est un objectif virtuel à la fois théoriquement et conceptuellement [24]. Une technique de décomposition hiérarchique s'impose ainsi comme une

des rares voies possibles (Kimemia et Gershwin [7], Sethi et Zhang [24]). L'idée est de réduire de façon exacte ou approximative le système global en des sous-systèmes qui peuvent être traités plus facilement. La solution des ces sous-problèmes permet la construction d'une solution globale. Lors du fonctionnement d'un atelier flexible les problèmes qui intéressent les responsables de la production sont surtout les problèmes

- de chargement (injection des pièces dans le système),
- d'acheminement (détermination de la séquence des machines que la pièce doit visiter pour effectuer ses tâches).
- de planification et d'ordonnancement (détermination des taux de production).

Plusieurs critères sont utilisés pour déterminer les performances d'une politique particulière. Parmi ces critères, nous trouvons:

- la minimisation du coût d'installation,
- la minimisation du temps total requis pour finir toutes les opérations,
- la minimisation du nombre d'opérations dans le système,
- le jumelage de la production et de la livraison (Just-in-Time),
- la minimisation du temps où les machines sont libres,
- la minimisation des coûts de production et d'entreposage.

Les objectifs ultimement visés sont entre autres de:

- satisfaire une demande souvent incertaine.
- minimiser les coûts globaux pour rester concurrentiel.

- produire avec les compromis idéaux de qualité, coût et quantité pour conserver une bonne part du marché.

Dans la section suivante nous allons illustrer la décomposition hiérarchique proposée par Kimemia et Gershwin [7]. Cette décomposition représente les différents niveaux de contrôle de la politique de production spécifiquement conçue pour contrôler l'explosion de complexité provenant de la prise en compte des pannes dans l'atelier.

### 2.1.1 Décomposition hiérarchique

Dans [7], Kimemia and Gershwin proposent une décomposition hiérarchique composée de trois niveaux. Cette décomposition exploite la capacité disponible en anticipant dans un sens statistique les pannes, les réparations des stations de travail ainsi qu'un changement dans les exigences de la demande. Chaque niveau de hiérarchie est caractérisé par la longueur de l'horizon de planification ainsi que le type de données requis pour le processus de prise de décisions. Les plus hauts niveaux de la hiérarchie possèdent typiquement des horizons longs et utilisent des données fortement agrégées. Cependant, les niveaux les plus bas possèdent des horizons de planification plus courts et utilisent des informations plus détaillées. La nature des aléas sur chaque niveau peut également différer. Une politique de production adéquate est celle qui doit anticiper ces événements ainsi que les changements dans la demande.

Les politiques d'acheminement et d'ordonnancement sont basées sur un ensemble d'hypothèses sur les échelles de temps de différentes classes d'événements qui surviennent durant le fonctionnement d'un système de fabrication flexible [7]:

- le temps le plus court est celui des ajustements (reconfiguration) requis lors d'un changement d'opération ou lors du traitement d'une nouvelle pièce. Ce temps est supposé négligeable comparativement au temps de fonctionnement;

- la deuxième plus grande période de temps est celle consacrée à une opération moyenne;
- ensuite vient les valeurs moyennes des périodes de fonctionnement ou des périodes de pannes;
- enfin le temps le plus long est l'horizon sur lequel on doit effectuer le contrôle.

De plus [22]:

- les tampons internes sont considérés de longueur négligeable. Par conséquent le temps requis pour remplir les tampons est très petit lorsque comparé à la moyenne des périodes de pannes et la moyenne des périodes de fonctionnement. Cependant ils sont assez grands pour contenir les pièces qui attendent pour subir une nouvelle opération. Il y a donc de manière générale une synchronisation des taux de production des divers éléments d'une chaîne de production.
- le temps de transit des pièces dans l'atelier est négligeable par rapport à la moyenne des périodes de panne et des périodes de fonctionnement.

Ces hypothèses sur les valeurs relatives des temps entre les événements permettent la décomposition hiérarchique suivante:

#### **Le niveau de contrôle de flux (planification et ordonnancement):**

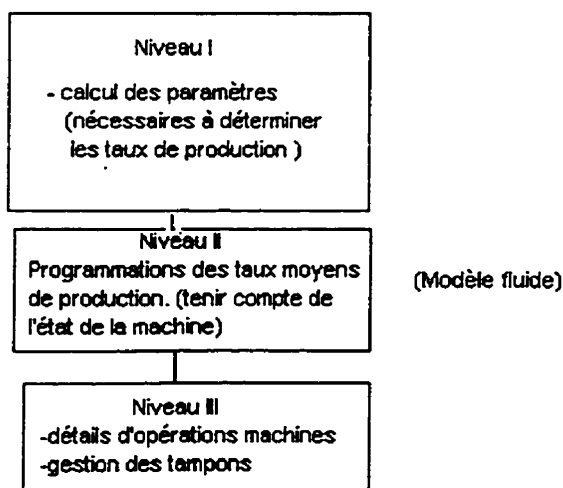
Ce niveau détermine les taux de production moyens à court terme de chaque type de pièce. Les taux doivent être déterminés conjointement car les pièces se partagent le temps disponible à la station de travail. En plus, la demande, la capacité du système de transport, la limite de stockage et la fiabilité des ressources doivent être prises en considération. Le mélange de pièces au cours de la production doit être ajusté continuellement de manière à tenir compte des pannes aléatoires des stations de travail.

### Le niveau de contrôle d'acheminement:

Une pièce entrant dans le système peut suivre un ou plusieurs chemins dans le but de subir toutes les opérations requises. La proportion des pièces qui doivent suivre chaque chemin disponible, est choisie par le niveau de contrôle d'acheminement. L'objectif est de respecter le taux dicté par le contrôleur de flux et de minimiser la congestion et par conséquent, le retard à travers le système. Ce dernier peut être modélisé comme un système de files d'attente en considérant les stations comme des noeuds de services. Le taux d'arrivée des pièces est déterminé par le niveau de contrôle de flux.

### Le niveau de contrôle de séquence (injection des pièces):

C'est le niveau de contrôle le plus bas. À ce niveau se situent les algorithmes permettant de régler le rythme d'introduction des pièces à usiner dans le système, ainsi que la supervision des opérations des stations de travail. L'objectif est de maintenir les taux de flux choisis aux niveaux précédents.



**Figure 2.1:** Décomposition hiérarchique pour répondre aux pannes aléatoires telle que suggérée par Kimemia et Gershwin

Dans la présente thèse nous mettons l'accent particulièrement sur le niveau de contrôle de flux. La formulation du problème est présentée dans la section suivante.

## 2.2 Problème de contrôle de flux

### 2.2.1 Formulation du problème

Le problème du contrôle de flux de production d'un atelier de fabrication flexible a été formulé et partiellement traité à l'origine par Kimemia et Gershwin [7].

Soit un atelier de fabrication flexible pouvant produire  $p$  types de pièces et dont les machines peuvent être dans plusieurs modes de pannes. L'état global de l'atelier est représenté par une variable discrète notée  $\alpha(t)$  qui correspond à une chaîne de Markov à temps continu pouvant prendre valeur à l'intérieur d'un espace d'état fini. Cette chaîne de Markov est irréductible, homogène et caractérisée par la matrice de transition  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ , ( $\lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i}^n \lambda_{ij}$ ), où  $n$  représente les différents modes du système et les  $\lambda_{ij}$ , qui représentent les taux de transitions du mode  $i$  vers le mode  $j$ , sont tels que

$$P[\alpha(t+dt) = j | \alpha(t) = i] = \lambda_{ij} dt + o[dt]$$

$$P[\alpha(t+dt) = i | \alpha(t) = i] = 1 + \lambda_{ii} dt + o[dt]$$

où  $\lim_{dt \rightarrow 0} o[dt] = 0$ . Le système doit satisfaire une demande par unité de temps connue  $d(t) \in \mathbb{R}^p$ . Soit  $x(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur représentant le surplus qui est la différence cumulative entre la production et la demande pour tous les types de pièces. Les coordonnées de  $x(t)$ ,  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , peuvent être soit positives soit négatives. Des valeurs positives de  $x_i(t)$  correspondent à un inventaire de pièces en stock tandis que  $x_i(t)$  négatif reflète le cas où le stock est épuisé avec un déficit de production par rapport à la demande. Les taux de production  $u_\alpha(x, t) \in \mathbb{R}^p$  doivent être choisis pour chaque mode et pour chaque niveau  $x$ , dans un espace convexe  $\Omega_\alpha$ . Cet espace représente l'ensemble des commandes admissibles et définit également les limites de capacité disponible quand le système est en mode  $\alpha$ . Pour une politique particulière  $u_\alpha(x, t)$ , la dynamique de la variable  $x(t)$  est dictée par  $\alpha(t)$ . Le taux de changement net de  $x(t)$  à l'instant  $t$  quand  $\alpha(t) = \alpha$  et  $x(t) = x$  est caractérisé par l'équation



différentielle suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = u_\alpha(t) - d(t), \\ \text{avec } x(0) = x_0 \text{ et } \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

La précision du modèle est adéquate pour un horizon de temps long par rapport au temps nécessaire pour produire une pièce individuelle. Idéalement les pièces sont produites sur demande conservant ainsi le niveau d'inventaire égal à zéro (Just-in-Time).

Supposons à présent que l'atelier est composé de  $M$  stations de travail ayant chacune  $l_m$  machines identiques avec  $m = 1, \dots, M$ . L'état  $\alpha(t)$  est alors un  $M$ -uplet de variables entières,  $\alpha_m(t)$ , où pour un  $m$  donné,  $\alpha_m(t)$  est égale au nombre de machines opérationnelles à la station  $m$ . Dans ces conditions l'espace de contrôle admissible quand le système est à l'état  $\alpha$  est donné par:

$$\Omega(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} \text{L'ensemble de tous les vecteurs } u_\alpha(x, t) \in \mathbb{R}^p \\ \text{tel que pour tout } 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq p \\ \sum_{j=1}^p \tau_{ij} u_{\alpha j} \leq \alpha_i(t) \\ u_{\alpha j} \geq 0 \end{array} \right\}$$

où  $\tau_{ij}$  représente le temps requis par la machine  $i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , pour effectuer toutes les opérations sur la pièce,  $j = 1, \dots, p$ . Dû aux différents sauts aléatoires de  $\alpha(t)$ , la capacité du système n'est pas un espace fixe mais plutôt un ensemble aléatoire variant dans le temps.

Ceci nous amène à définir deux types d'états. Un état est dit faisable si le vecteur de demande  $d(t)$  s'inscrit à l'intérieur de l'espace  $\Omega_\alpha$  et non faisable dans le cas contraire [22].

Le modèle tel que décrit est un modèle fluide à structure variable puisque  $x(t)$  est une variable continue dont la dynamique change selon l'état discret  $\alpha(t)$ . Le système est complètement caractérisé par un état hybride  $[x(t), \alpha(t)]^t$ . De plus pour un état  $\alpha(t)$  connu, la dynamique de  $x(t)$  est connue et déterministe. Ainsi,  $(x(t), \alpha(t))$  fait également partie de l'ensemble des processus déterministes par morceaux [31].

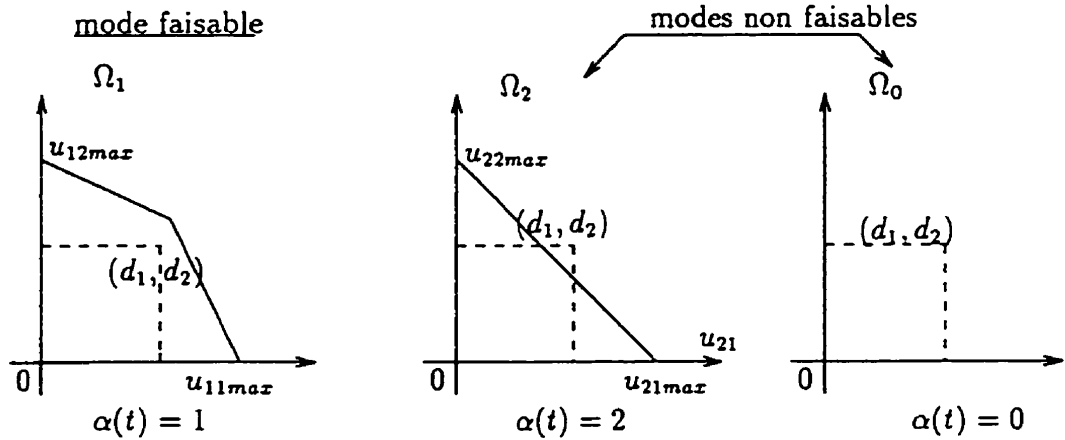


Figure 2.2: Exemple de variation de l'espace de capacité en fonction des différents modes de l'atelier

À présent, le problème de contrôle de flux peut être formulé. Ainsi, étant donné un atelier de fabrication flexible, soit  $[x(t_0), \alpha(t_0)]^t$  l'état hybride initial, l'objectif est de déterminer une politique de production à l'intérieur de  $[t_0, T]$  solution du problème de minimisation donné [22], [12] par:

$$J(x, \alpha, t_0) = \min_u E \left[ \int_{t_0}^T \ell(x(t)) dt \mid x(t_0) = x, \alpha(t_0) = \alpha \right] \quad (2.2)$$

sujet aux contraintes suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = u(t) - d(t). & \text{avec } x(t_0) = x, \alpha(t_0) = \alpha, \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \tau_{ij} u_{\alpha j} \leq \alpha_i(t), \\ u_{\alpha j} \geq 0. \end{cases} \quad (2.3b)$$

Le coût instantané  $\ell(x)$  pénalise le contrôleur pour son échec à satisfaire la demande ou pour avoir créé un inventaire suite à un excès de production.  $\ell(x)$  est une fonction qui peut s'écrire comme la somme des coûts instantanés pénalisant le niveau d'inventaire de chaque type de pièces respectivement. Ceci implique que:

$$\ell(x) = \sum_{j=1}^p \ell_j(x), \quad (2.4)$$

où  $\ell_j(x)$  est une fonction scalaire tel que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \ell_j(x) = \infty, \\ \min_x \ell_j(x) = 0, \\ \ell_j(0) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

De plus (voir Sethi et Zhang [24] chap. 3),  $\ell_j(x)$  est une fonction non négative, convexe tel qu' il existe des constantes positives  $\rho_{1\ell}, \rho_{2\ell}, \rho_{3\ell}, k_{1\ell} \geq 0, k_{2\ell} \geq 0$ , de sorte que

$$\rho_{1\ell} |x|^{k_{1\ell}} - \rho_{2\ell} \leq \ell_j(x) \leq \rho_{3\ell} (|x|^{k_{2\ell}} + 1). \quad (2.6)$$

La classe de politique de production à considérer est constituée de fonctions en boucle fermée "feedback"  $u_\alpha(x, t) \in \Omega_\alpha$ . La caractérisation de la politique optimale du problème (2.2) a été l'objet de plusieurs travaux. La technique communément utilisée exploite les conditions d'optimalités données par les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (équations de la programmation dynamique). Les détails de cette caractérisation feront l'objet de la prochaine sous section.

### 2.2.2 Caractérisation de la politique optimale et notion de point critique d'inventaire (Hedging point)

Pour une politique particulière  $u_\alpha(x, t)$ , définissons le coût résiduel comme suit:

$$J_{u_\alpha}(x, \alpha, t) = E \left[ \int_t^T \ell(x) d\tau \middle| x(t) = x, \alpha(t) = \alpha \right], \quad (2.7)$$

$$J_{u_\alpha}(x, \alpha, T) = 0. \quad (2.8)$$

$J_{u_\alpha}(x, \alpha, t)$  représente l'espérance de la pénalité totale subie par le contrôleur pour le temps résiduel, sachant que  $x(t) = x$ , et  $\alpha(t) = \alpha$  à l'instant  $t$ . Rishel [21], Tsitsikilis [8], Sethi and Zhang [24], Akella et Kumar [16], Bielecki et Kumar [27] etc. montrent sous des conditions et des hypothèses généralement différentes que dans le cas du problème (2.2), la politique optimale est caractérisée par une équation

similaire à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Soit  $u_\alpha^*(x, t)$  la politique optimale si elle existe, alors la fonction coût optimale  $J_{u_\alpha^*}(x, \alpha, t)$  satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$0 = \min_{u \in \Omega(\alpha)} \left\{ \ell(x(t)) + \frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x}(u - d) + \frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial t} + \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} J_{u_\alpha^*}[x(t), \beta, t] \right\}, \quad (2.9)$$

où les différentes dérivées de  $J_{u_\alpha^*}(x, \alpha, t)$  sont évaluées à  $x(t), \alpha(t)$  et  $t$ . L'équation (2.9) fournit des conditions suffisantes pour identifier simultanément, dans le cas des ateliers de fabrication flexibles, une loi optimale en boucle fermée et le coût résiduel optimal (théorème de vérification). Sa principale difficulté est qu'elle est non linéaire et généralement de dimension élevée. Par conséquent, les chances de pouvoir obtenir une solution analytique (sauf pour certains cas très particuliers) sont très minces, alors que la résolution numérique s'avère être très lourde au niveau des calculs même pour des cas à faible dimension [9], [22]. Sa valeur cependant réside dans le fait qu'elle représente un moyen (unique en dehors du principe du maximum stochastique) pour déterminer les caractéristiques structurelles générales de la politique optimale  $u_\alpha^*(x, t)$  et du coût résiduel, sans chercher à obtenir ces derniers directement à partir de l'équation. Ces informations constituent ensuite la base de construction d'une heuristique sous-optimale. Sachant que  $u$  appartient au polyèdre  $\Omega_\alpha$  (contraintes linéaires) et étant donné qu'à la seule place où elle apparaît explicitement dans (2.9) elle est sous forme linéaire, le problème d'optimisation en (2.9) revient au problème de programmation linéaire décrit comme suit [7]:

$$\min_{u \in \Omega_\alpha} \frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x} u \quad (2.10)$$

$$\text{sujet aux contraintes linéaires (2.3b)} \quad (2.11)$$

Pour un  $x$  donné, le gradient  $\frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x}$  joue le rôle de vecteur coût attribué au taux de production des types de pièces dans le choix de la loi de contrôle. Vu les caractéristiques des programmes linéaires, une politique optimale de (2.10) prendra en général sa valeur à l'un des sommets du polyèdre  $\Omega_\alpha$  lorsque  $\frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x}$  existe. Par contre dans les cas particuliers où soit que  $\frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x}$  n'existe pas, soit qu'il est perpendiculaire aux faces  $\Omega_\alpha$  ou soit qu'il est nulle, une solution unique pour (2.10) n'existera pas.

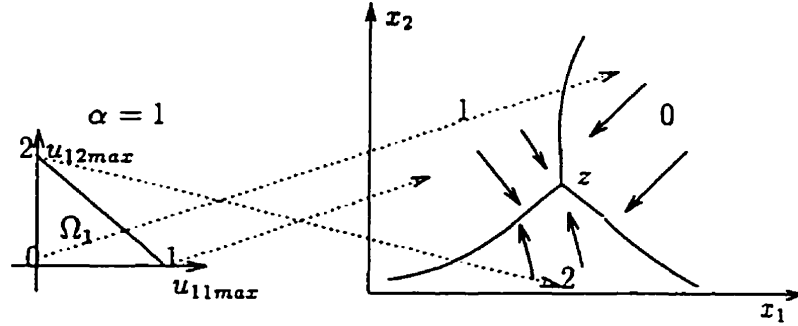
Le cas traité dans la littérature est celui où  $T \rightarrow \infty$ , c'est à dire l'horizon d'optimisation est infini. Dans ce cas, la fonction coût optimale  $J_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t), t)$  si elle existe, est indépendante explicitement de  $t$  et peut être écrite  $J_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t), t) = J_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t))$ . À cause des propriétés d'insensibilité des solutions des programmes linéaires à des variations bornées et continues des coefficients coûts (les coordonnées de  $\frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x}$ ), la solution optimale est égale à un sommet de  $\Omega_\alpha$  et demeure constante pour un ensemble de valeurs de  $x$  dans l'espace de surplus. Elle se situera ensuite à un autre sommet lorsque l'on quitte cet ensemble. Quand les coefficients coût prennent la valeur causant le saut, toute la partie entre l'ancien sommet et le niveau sommet constitue une solution optimale. Par conséquent, pour chaque état  $\alpha$  de la machine, une politique optimale divise l'espace en des régions dans lesquelles les taux de production sont constants (voir Rishel [21], Kimemia et Gershwin [7]). De plus, à cause de (2.1) et pour  $d(t)$  constant égal à  $d$ , on peut écrire que

$$\frac{dJ_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t))}{dt} = \frac{\partial J_{u_\alpha^*}}{\partial x} (u - d). \quad (2.12)$$

(2.12) représente la dérivée totale du coût résiduel par rapport au temps sur la trajectoire de  $x(t)$ . Si le système ne peut satisfaire la demande, la production sera de manière à minimiser le taux de croissance de  $J_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t))$ . Dans le cas où le système est dans un mode faisable ( $u_\alpha > d$ ), la politique de production doit choisir le plus haut taux de  $u_\alpha$  de manière à forcer  $J_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t))$  à décroître jusqu'à atteindre le point  $z_\alpha^*$  où il est minimum. L'existence de ce point est intimement liée à la convexité de  $J_{u_\alpha^*}(x(t), \alpha(t))$  par rapport à  $x$  (voir Sethi et Zhang [24], chap.3) elle même liée à la convexité de la fonction coût par unité de temps  $\ell(x)$  par rapport à  $x$ . Par conséquent pour chaque état faisable  $\alpha$ , il existera un point critique  $z_\alpha^*$ . Le point  $z_\alpha^*$  est alors appelé point critique d'inventaire optimal (seuil critique) et la politique en boucle fermée  $u_\alpha(x, t)$  est appelée politique à point critiques d'inventaire.

Le concept de seuils critiques est important. En effet, il est la conséquence immédiate de l'incertitude qui régit le fonctionnement de l'atelier à cause des différents types de pannes partielles dans lesquels il pourrait se trouver. Le seuil critique représente donc un niveau de réserve minimal qu'il faut bâtir pour se protéger

des pannes éventuelles à un coût moyen minimal sur l'horizon considéré.



**Figure 2.3:** Division de l'espace de production en différentes régions à taux de production constants.

Dans ce qui suit, nous abordons spécifiquement le cas des ateliers de fabrication flexibles produisant un seul type de pièces. Notre objectif est de donner quelques résultats qui ont permis récemment de caractériser les seuils critiques. De plus, nous présenterons les cas classiques étudiés dans la littérature (spécifiquement Akella et Kumar [16], Bielecki et Kumar [27], Sharifnia [25]) .

## 2.3 Optimisation des seuils critiques: cas mono-pièce

### 2.3.1 Cas d'un coût actualisé

[16] est le premier travail où une analyse rigoureuse du problème de contrôle de flux a été faite. Le système considéré par Akella et Kumar [16] est formé de machines mono-pièce pouvant se trouver dans l'un de deux modes: le mode opérationnel 1 ou le mode panne 2. La fonction de pénalité  $\ell(x(t))$  est une fonction scalaire et linéaire par rapport au niveau d'inventaire  $x(t)$  et est donnée par:

$$\ell(x(t)) = c^+ x^+(t) + c^- x^-(t), \quad (2.13)$$

La fonction coût est considérée sur un horizon infini et est décrite par l'équation suivante:

$$J(x_0, \alpha_0) = \min_{u(\cdot)} E \left\{ \int_0^\infty \exp(-\rho t) \ell(x(t)) dt | x(0), \alpha(0) \right\} \quad (2.14)$$

sujet aux contraintes:  $u(t) \leq u_{1 \max}$ ,  $u(t) \geq 0$

où  $x^+(t) = \max(x(t), 0)$  et  $x^-(t) = \max(-x(t), 0)$ , et avec  $c^+, c^-$  des constantes positives. Les variables,  $u_\alpha(t)$  et  $d(t)$  sont également considérées constantes. De plus l'espace de production  $\Omega_\alpha$  est équivalent à l'intervalle  $[0, u_{1 \max}]$ . Pour sa part  $u_{1 \max}$  représente le taux maximal de la capacité de production de la machine et est strictement supérieur à la demande  $d$  ( $u_{1 \max} > d$ ). Akella et Kumar démontrent dans ce cas la convexité de la fonction valeur optimale, alors que la politique optimale de contrôle satisfait la stratégie suivante:

$$\pi_{z^*}(x(t)) = \begin{cases} u_{1 \max} & \text{si } x(t) < z^*, \\ d & \text{si } x(t) = z^*, \\ 0 & \text{si } x(t) > z^*. \end{cases} \quad (2.15)$$

$z^*$  représente le point critique d'inventaire optimal. Sous cette politique, le taux de production varie selon la position de  $x(t)$  par rapport à  $z^*$ . L'objectif est de rejoindre ce point le plus rapidement possible soit en produisant à un taux maximal ou en arrêtant la production selon les cas respectifs où  $x(t) < z^*$  ou  $x(t) > z^*$ . Une fois ce point atteint (i.e.,  $x(t) = z^*$ ), le système y reste tant que l'état discret le permet. Akella et Kumar montrent que la condition nécessaire à l'optimalité de cette politique est reliée directement à la convexité et à la dérivabilité de la fonction valeur par rapport à ses entrées. La convexité de l'intégrant dans (2.14) assure la convexité du coût résiduel. De plus, la variable de contrôle  $u_\alpha(t)$  doit appartenir à un ensemble de politiques admissibles. Pour être considérées admissibles, ces politiques doivent vérifier certaines conditions suffisantes [16] définies par:

**Définition 2.1** Une fonction mesurable  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow [0, u_{1 \max}]$  est appelé une politique admissible si pour tout couple  $(\tau, x_0) \in \mathbb{R}^2$  avec  $\tau \geq 0$ , il existe une fonction

$y_\pi(t; \tau, x_0)$  qui satisfait:

$$\begin{aligned} y_\pi(t; \tau, x_0) &\text{ est absolument continue en } t \\ y_\pi(t; \tau, x_0) &= x_0 + \int_\tau^t (\pi(y_\pi(s; \tau, x_0)) - d) ds \text{ pour } t \geq \tau \\ y_\pi(t; \tau, x_0) &\text{ est continue en } (t, \tau, x_0) \\ y_\pi(.) &\text{ est unique} \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'admissibilité de  $u_\alpha(t)$ , garantit donc l'existence d'une solution unique de l'équation  $\dot{x}(t) = u_\alpha(t) - d$ . La condition d'optimalité décrite par l'équation de la programmation dynamique s'écrit:

• dans le cas d'un horizon infini

$$0 = \min_{u \in \Omega_\alpha} \left\{ \ell(x) + \sum_j J(x, j) \lambda_{j\alpha} + \frac{\partial J(x, \alpha)}{\partial x} (u_\alpha - d) \right\}$$

Le contrôle optimal prend ces valeurs sur les sommets de  $\Omega_\alpha$  (contraintes linéaires) selon le signe de  $\frac{\partial J(x, \alpha)}{\partial x}$ . Sous une politique de production dérivable par morceaux de type (2.15),  $z^*$  est donné par

$$z^* = \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta_{\min}} \log \left( \frac{c^+}{c^+ + c^-} \left[ 1 + \frac{\rho d}{\lambda_1 d - (\rho + \lambda_2 + d \beta_{\min})(u_{1 \max} - d)} \right] \right) \right\} \quad (2.17)$$

où dans (2.17)  $\beta_{\min}$  est la seule valeur propre négative de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\rho + \lambda_1}{u_{1 \max} - d} & -\frac{\lambda_1}{u_{1 \max} - d} \\ \frac{\lambda_2}{d} & -\frac{\lambda_2 + \rho}{d} \end{bmatrix} = V^{-1} \Lambda^t$$

où  $\lambda_i = -\lambda_{ii}$ ,  $i = 1, 2$ , représentent les taux de transition de la chaîne de Markov caractérisant la dynamique de l'état discret de la machine.

Cependant, même pour un cas aussi élémentaire dans l'échelle de complexité, l'analyse s'avère compliquée.

### 2.3.2 Calcul des densités de probabilités stationnaires d'un système à deux états soumis à une politique à seuils critiques

Bielecki et Kumar [27] inaugurent une nouvelle approche qui consiste à calculer la fonction de densité de probabilité stationnaire du surplus  $x(t)$  lorsqu'elle existe. Ils



considèrent le cas de la machine à deux états traitée par [16]. Seul le critère de minimisation a changé. En effet, au lieu d'un coût avec un facteur d'actualisation ( $\exp(-\rho t)$ ), ils résolvent le problème d'optimisation d'un coût moyen par unité de temps sur un horizon infini.

$$\begin{aligned} J(x(0), \alpha(0)) &= \min_{u \in \Omega_\alpha} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T \frac{\ell(x)}{T} |x(0), \alpha(0) dt \right\} \\ \ell(x) &= (c^+ x^+(t) + c^- x^-(t)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

En plus de satisfaire les conditions suffisantes d'admissibilité (2.16), la politique de production doit garantir la stabilité du système. Cette stabilité est satisfaite si  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_\pi[x^2(T)]}{T} = 0$ . Une condition suffisante d'optimalité d'une loi admissible ainsi que d'existence d'une fonction coût moyen optimale (théorème de vérification) est dérivée dans [27]:

**Théorème 2.1** *Supposons que  $\pi^*$  est une politique admissible et stable alors il existe des fonctions continûment différentiables  $W(x, i)$  et une constante  $J^*$  telles que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} [\pi^*(x, i) - d] \frac{dW(x, i)}{dx} - \lambda_i [W(x, i) - W(x, 1 - i)] + \ell(x) - J^* = 0 \\ \text{pour } i = 0, 1 \text{ et pour tout } x, \\ [\pi^*(x, i) - d] \frac{dW(x, i)}{dx} = \min_{0 \leq u \leq u_{1 \max}} [u - d] \frac{dW(x, i)}{dx}, \\ |W(x, i)| \leq k_1 x^2 + k_2, \text{ pour } k_1, k_2 \text{ donnés.} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{\pi^*} \left[ \int_0^T \ell(x(t)) dt \right] = J^* \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ E_\pi \int_0^T \ell(x(t)) dt \right],$$

pour toute politique admissible et stable  $\pi$  et pour toutes conditions initiales  $x(0)$ .

La démonstration de ce théorème fait intervenir l'ergodicité du système afin de justifier l'existence et la valeur de  $J^*$ . L'équation de (2.17) représente la condition suffisante d'optimalité similaire à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

La procédure suivie par Bielecki et Kumar [27] est intéressante et se compose de quatre étapes:

1. choisir la politique de contrôle dans un ensemble de politiques sous la forme

$$u_{\alpha}(t) = \begin{cases} u_{1 \max} & \text{si } x(t) < z, \alpha(t) = 1 \text{ (opérationnel),} \\ d & \text{si } x(t) = z, \alpha(t) = 1, \\ 0 & \text{si } x(t) > z, \alpha(t) = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha(t) = 2 \text{ (panne).} \end{cases} \quad (2.20)$$

Il est montré que ces politiques vérifient les conditions d'admissibilité et de stabilité. Le seul paramètre inconnu est alors  $z$  qu'il faut déterminer pour optimiser au sein de la classe de politiques à seuil critique (2.20).

2. calculer les fonctions de densité de probabilité stationnaires en fonction du paramètre  $z$ .
3. calculer le coût tel que décrit par (2.18).
4. minimiser le coût par rapport à la variable  $z$ .

En suivant cette procédure, Bielecki et Kumar [27] arrivent à démontrer l'existence de  $z^*$  et par voie de vérification (théorème 2.1) que (2.20) est bien la politique de contrôle optimale. L'expression de  $z^*$  est la suivante:

$$z^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{u_{1 \max} \lambda_1 (c^+ + c^-)}{c^+ (u_{1 \max} - d) (\lambda_1 + \lambda_0)} \leq 1 \\ \frac{1}{\left(\frac{\lambda_0}{d}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{u_{1 \max} - d}\right)} \log \left[ \frac{u_{1 \max} \lambda_1 (c^+ + c^-)}{c^+ (u_{1 \max} - d) (\lambda_1 + \lambda_0)} \right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.21)$$

Le critère de performance  $J^*$  est donné par:

$$J^* = \begin{cases} \frac{c^- \lambda_1 u_{1 \max} d}{(\lambda_1 + \lambda_0) [\lambda_0 (u_{1 \max} - d) - \lambda_1 d]} & \text{si } z^* = 0 \\ \frac{c^+ d}{\lambda_1 + \lambda_0} + \frac{\left(\frac{\lambda_0}{d}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{u_{1 \max} - d}\right)}{\log \left[ \frac{u_{1 \max} \lambda_1 (c^+ + c^-)}{c^+ (u_{1 \max} - d) (\lambda_1 + \lambda_0)} \right]} & \text{si } z^* \geq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

### 2.3.2.1 Extension de la méthode de Bielecki-Kumar

L'approche proposée par Bielecki et Kumar s'avère simple et prometteuse. En effet, Sharifnia [25], Caramanis et Sharifnia [9], Algoet [1] ont tous utilisé cette approche mais de manières différentes. En particulier Sharifnia [25] divise l'espace de la variable  $x(t)$  en plusieurs régions limitées par les seuils optimaux d'inventaire dont

le nombre est égal à celui des états faisables du système. Ces seuils sont classés en ordre décroissant (i.e.,  $z_i > z_j$  si  $i < j$ ). En faisant, l'équilibre du flux de probabilité passant à travers un élément d'espace de largeur  $\Delta x$ , Sharifnia [25] montre que les fonctions de densité de probabilité reliées à chaque état de la chaîne de Markov sont solutions d'équations aux dérivées partielles par rapport à la variable continue  $x(t)$ . Sharifnia utilise les hypothèses suivantes:

- $x(t)$  est un processus ergodique
  - \* la variable discrète  $\alpha(t)$  qui représente les différents modes de l'atelier est une chaîne de Markov irréductible
  - \*  $u(t)$  est telle que  $x(t)$  est stationnaire
- $x(t)$  est stationnaire si le système est strictement faisable à long terme

$$\sum_{i=1}^m \pi_i u_{i \max} > d \quad (2.23)$$

La condition de faisabilité (2.23) signifie que si on produit au taux maximal dans chaque état du système, l'inventaire  $x(t)$  possède à long terme une tendance positive. La moyenne des vitesses de variation de  $x(t)$  dans la région  $(-\infty, 0)$  est toujours positive. Ceci fait que le point d'inventaire optimal limitant cette région est récurrent. Cependant, puisque les seuils critiques sont compris dans un espace fini tous les seuils critiques vont être récurrents et ainsi  $x(t)$  va être stationnaire.

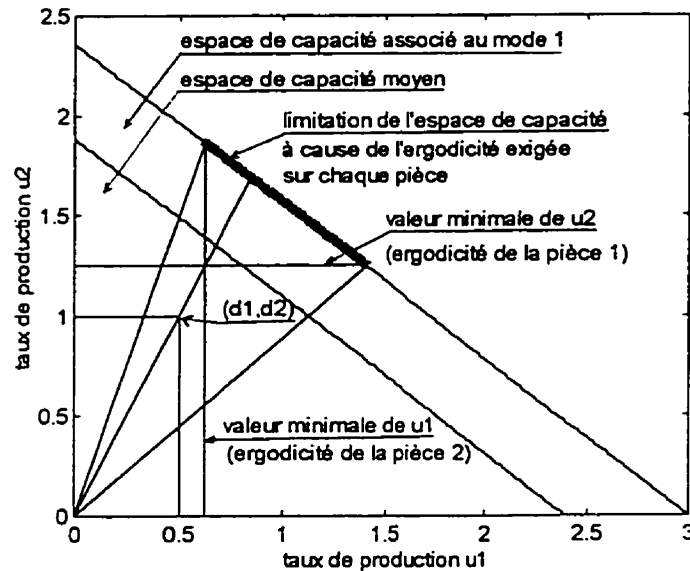
Jusqu'à présent les travaux décrits concernaient les ateliers de fabrication flexibles produisant un seul type de pièce. Cependant, en général, un des points forts des ateliers de fabrication flexible est précisément cette possibilité de travailler avec plusieurs pièces simultanément. Cependant, la difficulté de traiter directement ce genre de situation multi-dimensionnelle en tenant compte des pannes dans l'atelier a été maintes fois soulignée [4], [7], [16]. En se basant sur une idée originellement formulée par Kimemia et Gershwin [7], Caramanis et Sharifnia [9] proposent une approche approximative qui vise à décomposer le problème multi-dimensionnel

d'origine en plusieurs sous-problèmes scalaires indépendants. Cette approche est présentée dans la prochaine section.

## 2.4 Optimisation des seuils critiques: cas multi-pièce

Caramanis and Sharifnia [9] décrivent une méthode approximative qui permet de réduire le problème de contrôle de flux dans le cas des systèmes multi-pièce en un ensemble de sous-problèmes découplés correspondant à des problèmes de contrôle de flux pour systèmes mono-pièce. Ils utilisent à cette fin une décomposition de l'espace de production en plusieurs régions orthogonales où la capacité de production pour une pièce individuelle est comprise entre 0 et un taux maximal de production. L'affectation de la capacité de production est faite de façon indépendante et sans tenir compte de la position des niveaux d'inventaires des autres pièces par rapport à leurs seuils critiques respectifs. Ceci est équivalent à remplacer l'espace de capacité de production stochastique  $\Omega_\alpha$  par des hypercubes souscrits. Soit  $\partial\Omega_\alpha$  la frontière de  $\Omega_\alpha$  et soit  $c$  un point décrit par  $(u_{\alpha 1 \max}^c, u_{\alpha 2 \max}^c, \dots, u_{\alpha i \max}^c, \dots)$  appartenant à  $\partial\Omega_\alpha$  et représentant le sommet d'un hypercube souscrit. Étant donné que cette décomposition résulte en une dynamique indépendante pour chaque pièce, un choix spécifique de  $c$  appartenant à la frontière de  $\Omega_\alpha$  n'est permis que si la contrainte d'ergodicité ( $E[u_{\alpha i \max}^c] > d_i$ ) est satisfaite pour tous les types de pièces où  $u_{\alpha i \max}^c$  est le taux maximal de production de la pièce  $i$  quand la machine est au mode  $\alpha$  et pour un choix particulier de  $c \in \Omega_\alpha$ . Ainsi, même si ce contrôleur sous-optimal présente au niveau calcul un grand intérêt, de par sa simplicité, il correspond néanmoins à d'importantes limitations dans le choix de la capacité de production, principalement à cause de la condition d'ergodicité exigée sur chaque type de pièce. En effet, l'espace de capacité résultant est un sous espace restreint de  $\Omega_\alpha$  tel qu'illustré à la figure 2.4 suivante pour le cas d'un système produisant deux types de pièces.

De plus, le découplage complet des dynamiques des inventaires correspond à une sous utilisation de la capacité de production quand au moins une des pièces a atteint son point critique. En effet, à ce moment le point de production se situe à



**Figure 2.4:** Les désavantages du contrôleur sous-optimal suggéré par Caramanis et Sharifnia

l'intérieur de l'espace  $\Omega_\alpha$  et non plus sur la frontière  $\partial\Omega_\alpha$  (production maximale). Il y a donc là matière à amélioration.

Dans ce que nous venons de voir, nous observons que la théorie développée ne correspond pas toujours aux exigences réelles dans les ateliers de fabrication flexible. En effet, la majorité des décisions et de la planification de la production se fait à court ou à moyen terme or les lois de commande sont construites sur la base d'un horizon infini. Dans la sous-section suivante nous abordons les raisons pour lesquelles les résultats sur horizon infini ne répondent pas à toutes les attentes de rentabilité et d'efficacité recherchées.

## 2.5 Importance de l'analyse transitoire

Dans de nombreuses situations de contrôle reliées aux systèmes de fabrication flexibles, le décideur doit travailler sur horizon fini. En effet, visant un objectif à court

ou à moyen terme, le décideur est plus intéressé à trouver une stratégie optimale ou sous-optimale pour une durée finie que pour celle d'un horizon lointain, la solution sur horizon infini constituant une limite asymptotique de la solution sur horizon fini.

De plus, forts de l'interprétation donnée au point critique comme étant une réserve bâtie pour se protéger des interruptions de production dues aux pannes à un coût minimal en moyenne, nous pouvons nous attendre à ce que ce point varie selon l'horizon puisque la probabilité de tomber en panne augmente avec la longueur de l'horizon et par conséquent la proportion moyenne de temps passé dans l'état de panne croît au moins initialement, sachant qu'au départ l'atelier est opérationnel.

Notons également qu'aucune détermination, même par voie d'estimation, n'a été faite pour déterminer l'intervalle de temps à partir duquel la solution sur horizon infini peut être tolérée (sans impliquer une perte d'optimalité importante). L'utilisation de la solution sur horizon infini risque en effet de nous éloigner de l'objectif de rentabilité de l'investissement dans les ateliers de fabrication flexibles surtout, si des modifications fréquentes font en sorte que le système n'atteint jamais un régime stationnaire.

De plus les hypothèses sur un temps de reconfiguration négligeable dépendent des types d'opérations à effectuer et de l'intervention humaine. En général un coût doit être associé à cette période représentant d'une part la perte de production, d'autre part le coût attribué au personnel qui établit la configuration. Le travail de Zhang [29] constitue entre autres un début d'analyse de cette classe de problème (Set-ups).

En résumé il est naturel de s'attendre à ce que les seuils critiques correspondant à la politique de production optimale varient selon la longueur de l'horizon considéré. Il serait important de caractériser, au moins partiellement, cette variation. D'autre part, une estimation du temps de convergence du coût sous l'action de la politique optimale sur horizon infini vers le régime stationnaire, si nous insistons

à utiliser cette même politique pour un horizon fini, est primordiale.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes notions et définitions relatives à l'atelier de fabrication flexible. Cette technologie représente de part sa flexibilité un outil de plus en plus attrayant et indispensable pour demeurer compétitif sur un marché libre. Cependant, elle représente aussi un investissement important qu'il faut rentabiliser par l'utilisation efficace des ressources disponibles. Le but est de satisfaire une demande pouvant en général varier dans le temps et ce, à un coût bas et à l'intérieur de certaines contraintes de qualité. Cette tâche est rendue difficile par la présence d'aléas, en particulier les pannes de machines. Kimemia et Gershwin [7] proposent un contrôleur à structure hiérarchique où le contrôle de flux représente une phase importante et concerne la détermination des taux de production moyen à court terme en anticipant dans un sens statistique les différents modes du système et en respectant la capacité disponible dans chaque mode  $i$ . L'indice de performance est un coût infligé au contrôleur pour son échec à satisfaire la demande ou pour avoir produit avec excès. La solution optimale de ce problème de minimisation dans le cas mono-pièce, révèle l'existence d'un point critique associé à chaque mode faisable. La politique optimale serait d'atteindre ce point rapidement et d'y demeurer tant que possible. La politique prend alors le nom de politique à points critiques.

Cependant la majorité des travaux qui ont été faits pour la caractérisation de cette solution, ont été réalisés en considérant un horizon de planification infini. Des questions importantes sur la caractérisation du régime transitoire n'ont pas trouvé de réponse. Dans le prochain chapitre nous allons présenter deux travaux récents sur cette question. Les travaux de Malhamé et Boukas [19], et de Malhamé [10] constituent pour cette thèse un point de départ essentiel. C'est pour cette raison que nous avons choisi de leur consacrer un chapitre à part.

# CHAPITRE III

## CARACTÉRISATION DES STATISTIQUES TRANSITOIRES ET CRITÈRES D'ERGODICITÉ

### 3.1 Hypothèses de base et formulation du problème

Soit un système manufacturier produisant un seul type de produit et pouvant être dans un certain nombre de modes décrits par une variable aléatoire discrète  $\alpha(t)$  évoluant selon une chaîne de Markov irréductible caractérisée par la matrice d'intensité  $\Lambda$ . Le système doit satisfaire un taux demande par unité de temps  $d$  donné. À chaque instant  $t$ ,  $x(t)$  est une variable aléatoire représentant le niveau de surplus. Le taux de production  $u_\alpha(x)$  doit être sélectionné pour chaque état discret  $\alpha$  du système et pour chaque valeur d'inventaire  $x$ , sur un polyèdre convexe  $\Omega_\alpha$ . L'ensemble  $\Omega_\alpha$  représente l'ensemble de contrôles admissibles et stables qui inclut la limite de capacité du système quand il est dans l'état  $\alpha$ . Le taux de changement  $\dot{x}(t)$  à l'instant  $t$ , quand  $\alpha(t) = \alpha$  et  $x(t) = x$ , est donné par:

$$\dot{x}(t) = v_\alpha(x) = u_\alpha - d \quad (3.1)$$

L'objectif est de trouver un taux de production  $u_\alpha^*(x) \in \Omega_\alpha$  pour chaque mode du système et pour chaque valeur du niveau d'inventaire  $x$ , de manière à minimiser le coût moyen par unité de temps, avec  $\ell(x)$  convexe positive, et  $\ell(0) = 0$ :

$$J^*(x(0), \alpha(0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} \ell(x(t)) dt | x(0), \alpha(0) \right] \quad (3.2)$$

Hypothèses:

- $x(t)$  est prise comme une variable scalaire continue.
- $\Omega_\alpha$  est un segment positif de l'axe réel borné par le taux de production maximale à l'état  $\alpha$ , donc  $\Omega_\alpha = [0, u_{\alpha \max}]$ .



- $J(x, \alpha)$  est convexe

Vu les résultats de Bielecki et Kumar [27], Sethi et Zhang [24], la politique optimale est de type à points critiques. Considérons donc le système (3.1) sous l'ensemble de politiques de production à points critiques (Hedging point policies).

Soit:

$$f_\alpha(x, t) dx = P[x \leq x(t) \leq x + dx, \alpha(t) = \alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n]$$

$f_\alpha(x, t)$  : la fonction de densité de probabilité hybride associée à l'état hybride du processus de Markov  $[x(t), \alpha(t)]^t$

et

$P_{z_\alpha}(t)$  : la masse de probabilité que  $x(t) = z_\alpha$  et  $\alpha(t) = \alpha$

pour  $\alpha = 1, \dots, n$

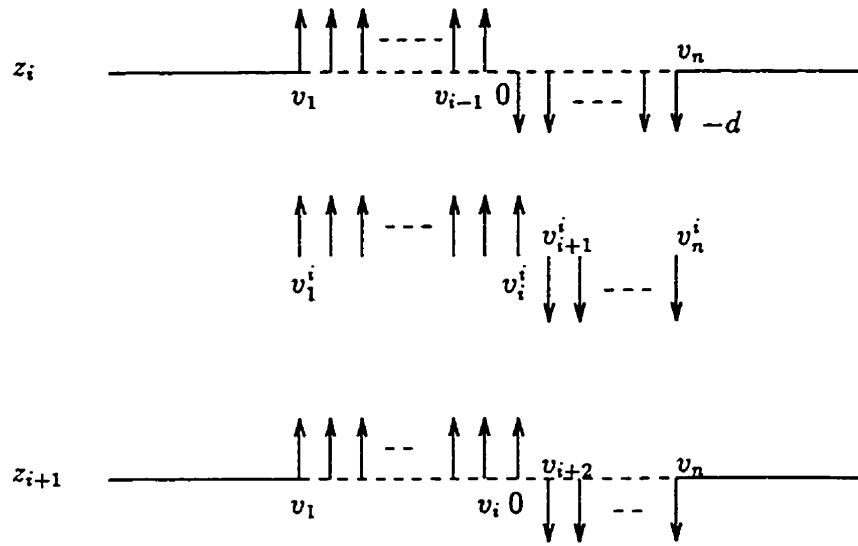
Les seuils  $z_i$  sont constants et ordonnés dans l'espace du surplus  $x(t)$  en ordre décroissant  $z_1 > z_2 > \dots > z_m$  et sont associés avec les états faisables convenablement indexés de  $i = 1, \dots, m$ . Les états non faisables sont indexés à partir de  $m + 1, \dots, n$ . Définissons aussi les régions  $R_i = \{x | z_{i+1} < x(t) = x < z_i\}$  et où  $R_0 = \{x | z_1 < x(t) = x < \infty\}$  ainsi que  $R_m = \{x | -\infty < x(t) = x < z_m\}$ . Pour un état  $\alpha$  donné, le taux de production maximale est constant à l'intérieur des régions  $R_i$  et est noté  $u_{\alpha \max}^i$ . Le taux de variation de l'inventaire  $x(t)$  est noté  $v_\alpha^i$ , quand  $\alpha(t) = \alpha$  et  $x(t) \in R_i$ ,  $v_\alpha^i = u_{\alpha \max}^i - d$ . Sous ces considérations,  $v_\alpha^i$  est toujours positif indépendant de  $i$  pour tout  $\alpha \leq i$  et  $v_\alpha^i = -d$  pour tout  $\alpha > i$  (Fig2.1)

En utilisant les équations d'équilibre des courants de flux de probabilité dans un élément  $\Delta x$  et pour un intervalle de temps  $\Delta t$ , Malhamé et Boukas démontrent le théorème suivant [17]:

**Théorème 3.1** *Le vecteur des fonctions de densité de probabilité hybrides  $\tilde{f}_\alpha(x, t) = [f_1(x, t) f_2(x, t) \dots f_n(x, t)]^T$  évolue selon le système d'équations aux dérivées partielles suivant:*

$$\frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} + \Lambda^t \tilde{f}(x, t), \forall z_{i+1} < x < z_i \quad (3.3)$$

$i = 1, \dots, m,$



**Figure 3.1:** Représentation géométrique des politiques à points critiques pour un système ayant  $n$  états dont  $m$  sont faisables

où  $V_i = \text{diag}[v_\alpha^i]$ . Au niveau des seuils critiques  $z_1, z_2, \dots, z_m$  et où  $z_{m+1} = -\infty$ , les conditions frontières s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} \lambda_{ij} P_{z_i}(t) + v_j^i(t) f_j(z_i^-, t) - v_j^{i-1}(t) f_j(z_i^+, t) = 0 & \text{pour } j = 1, 2, \dots, n; \\ j \neq i \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$\begin{cases} \frac{dP_{z_i}(t)}{dt} = \lambda_{ii} P_{z_i}(t) + v_i^i(t) f_i(z_i^-, t) - v_i^{i-1}(t) f_i(z_i^+, t) & \text{pour } j = i \end{cases} \quad (3.4b)$$

de plus

$$\begin{cases} \bar{f}(x, t) = 0 & \forall x > z_1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{f}(x, t) = 0; \end{cases} \quad (3.5)$$

Notons qu'en supposant l'existence d'un régime stationnaire,  $\frac{\partial \bar{f}(x, t)}{\partial t} = 0$  et  $\frac{dP_{z_i}(t)}{dt} = 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , le système d'équations aux dérivées partielles se réduit au système d'équations différentielles en  $x$  présenté par Sharifnia [25].

**Interprétation du théorème** Ce système d'équations aux dérivées partielles représente les équations de Kolmogorov d'un système à états hybrides. Il décrit la

dynamique et la propagation des probabilités à l'intérieur de l'espace du processus d'inventaire  $x$ . Les échanges entre les densités de probabilité à l'intérieur de cet espace sont assurés par la matrice de transition  $\Lambda$ . C'est un système conservateur. En effet, la probabilité totale donnée par la somme des aires sous les fonctions de densité de probabilité plus la somme des masses de probabilité aux seuils critiques est toujours égale à 1. La masse de probabilité notée par  $P_{z_i}(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , exprime la possibilité que la trajectoire du processus d'inventaire séjourne un temps non nul au point  $z_i$ . Si nous interprétons  $v_i(t) f_i(x, t)$  comme un courant de probabilité à une position  $x$  donnée, alors (3.4a) exprime que les courants de probabilités sont généralement discontinus au niveau du point critique associé au mode  $i \neq j$ . Le niveau de discontinuité est égal à  $\lambda_{ij} P_{z_i}(t)$  qui est aussi la probabilité de quitter  $z_i$  dans le mode  $j$ . L'équation (3.4b) est la contre partie de (3.4a). Elle met en relief le fait que le taux de variation de la masse de probabilité à  $z_i$  est égal à un courant positif venant des régions autour de  $z_i$  grâce aux densités de probabilité associées au mode  $i$ , moins le taux avec lequel une machine déjà à  $z_i$  dans le mode  $i$  quitte ce mode et contribue à soutenir les courants de probabilités associés aux autres modes autour de  $z_i$ . Cette échange au niveau des frontières et la propagation à l'intérieur de l'espace du processus d'inventaire  $x(t)$  font en sorte qu'il n'y a aucune perte de probabilité.

En notant que l'état  $x(t)$  ne peut évoluer que d'une région  $\{z_i < x < z_{i+1}\}$  et  $\{x = z_i\}$ , à une région  $\{z_j < x < z_{j+1}\}$  ou  $x = \{x = z_j\}$ ,  $j = i \pm 1$ , Malhamé et Boukas définissent un nouveau processus ponctuel marqué "Marked renewal process",  $P(t)$  [26], où les événements sont associés avec chaque transition de  $x(t)$  dans ces régions disjointes. Les nouveaux états du processus sont:

$$\begin{aligned}
 j^{(0)} &: x(t) \text{ entre } \{x = z_j\} \text{ à l'état } \alpha = j \text{ à l'instant de transition} \\
 j^{(1)} &: x(t) \text{ entre } \{z_{j+1} < x < z_j\} \text{ à l'état } \alpha = 1 \text{ à l'instant de transition} \\
 &\vdots \\
 j^{(i)} &: x(t) \text{ entre } \{z_{j+1} < x < z_j\} \text{ à l'état } \alpha = i \text{ à l'instant de transition} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$j^{(n)}$  :  $x(t)$  entre  $\{z_{j+1} < x < z_j\}$  à l'état  $\alpha = n$  à l'instant de transition

où  $j = 1, \dots, m$ . Le nouveau processus  $Y(t)$  est constant par morceaux. Il constitue un processus de renouvellement markovien avec matrice d'intensité de transitions  $Q = [q_{ij}(t)]$ . Le processus  $Y(t)$  ne change d'état qu'après avoir atteint une des frontières limitant la région  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . L'espace d'état de  $Y(t)$  est composé de  $m(n+1)$  états. En numérotant, ces événements  $j^{(i)}$  par un entier  $k$  où  $k = 1$  pour l'événement  $1^{(0)}$ ,  $k = 2$  pour l'événement  $1^{(1)}$  etc..., l'espace d'état de  $Y(t)$  sera formé par  $S = \{1, 2, \dots, m(n+1)\}$ . Ces événements constituent des instants de renouvellement. Soit  $P = [p_{ij}] = \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} q_{ij}(t) \right]$  = matrice de probabilité de

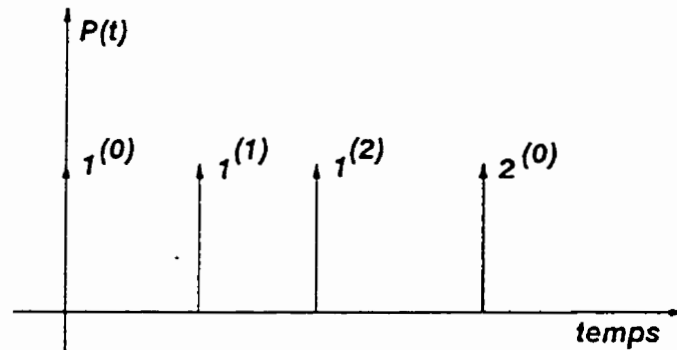


Figure 3.2: Exemple de réalisation des événements  $j^{(i)}$

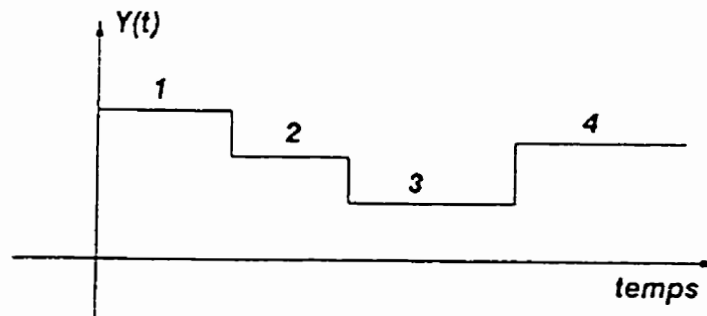


Figure 3.3: Réalisation correspondante du processus de renouvellement markovien  $Y(t)$

transition de la chaîne de Markov discrète emboîtée associée à  $Y(t)$  et soit  $\pi$ , tels que  $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$  et

$$\pi = \pi P.$$

L'existence et l'unicité du régime statique stationnaire repose sur le théorème suivant prouvé par exemple dans Çinlar [28]:

**Théorème 3.2** *Soit le processus de renouvellement markovien  $Y(t)$  irréductible, récurrent et apériodique avec  $\tau(k)$  moyenne du temps de séjour dans l'état  $k$ , finie pour tout  $k \in S$ ,  $S$  étant l'espace d'état fini. Alors pour un  $i \in S$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[Y(t) = j | Y(0) = i] = \frac{\tau(j) \pi_j}{\sum_k \tau(k) \pi_k}.$$

Les propositions suivantes sont démontrées dans [17].

**Proposition 3.1** *En vue de garantir l'ergodicité du processus de renouvellement markovien  $Y(t)$ , il est suffisant de montrer que la chaîne de Markov discrète emboîtée associée à  $Y(t)$  est irréductible et que tous les temps de séjour dans la chaîne sont finis.*

De plus, si la chaîne emboîtée est apériodique, toutes les valeurs propres de  $P$  excepté une, appartiennent à un cercle de rayon strictement inférieur à 1. Le nombre de transitions, requises pour la convergence au régime stationnaire, est donné par une limite supérieure finie  $N_T$  dictée par la valeur propre de  $P$  ayant le plus grand module strictement inférieur à 1.

**Proposition 3.2** *Si la matrice  $P$  caractérisant les transitions de la chaîne de Markov emboîtée associée à un processus de renouvellement markovien est irréductible, apériodique, alors il est possible de dériver une borne supérieure  $N_T$  sur le nombre de transitions requises avant de converger vers le régime permanent. Cette borne est caractérisée par le module de la valeur propre ayant le plus grand module strictement inférieur à 1.*

En se fondant sur la proposition 3.2, Malhamé et Boukas [17] proposent un critère d'évaluation d'une borne supérieure sur le temps moyen de convergence du processus stochastique du surplus vers le régime stationnaire:

**Proposition 3.3** *le temps moyen de  $N_T$  transitions du processus de renouvellement markovien possède une borne moyenne supérieure donnée par  $N_T \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots)$ , avec  $k \in S$  et où les  $\tau_k$  sont supposés finis.*

Le calcul des temps de séjour ainsi que les probabilités de transitions des événements partant d'un point autre que les seuils  $z_i$ , peut se faire en utilisant la transformée de Laplace [17] du système d'équations aux dérivées partielles données par le théorème 3.1. Le calcul peut être long et fastidieux. Malhamé [10] propose alors une autre méthode pour le calcul de la matrice de probabilité de transition de la chaîne discrète associée à  $Y(t)$ , ainsi que les moyennes de temps de séjour dans chaque état appartenant à  $S$ . Le calcul de ces statistiques est basé sur la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires couplées.

**Remarque sur le temps de convergence vers le régime stationnaire.**

Notons que la borne du temps de convergence vers le régime stationnaire donnée par la proposition précédente est en fait une estimation basée sur les moyennes des temps de séjour et par ce fait ne peut être une borne supérieure absolue. La variance des temps de séjour est alors cruciale pour avoir une estimation plus serrée et donc un degré de confiance plus élevé. En effet si la variance des temps de séjours est élevée (grandes dispersion dans les statistiques), cette borne aura peut de signification pratique. De plus cette borne exprime en fait la vitesse de convergence des statistiques de probabilités du processus hybride  $[x(t), \alpha(t)]^t$  et non de la fonctionnelle coût calculée le long d'une réalisation particulière et qui peut avoir un temps de convergence plus long.

### 3.1.1 Critère d'ergodicité

Dans [10] pour la première fois, une preuve dans un cadre théorique général du critère d'ergodicité est donnée. Le théorème suivant est établi dans [10]:

**Théorème 3.3** *Pour le système (3.1) soumis à la classe de politiques de production à points critiques, les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. les conditions de la proposition 3.1 sont satisfaites;
2. le nombre de valeurs propres de  $\Lambda^t V_m^{-1}$  avec une partie réelle positive est exactement  $n - m$ .

Sous l'hypothèse de valeurs propres distinctes de la matrice  $\Lambda^t V_m^{-1}$ , la condition 2) du théorème 3.3 est équivalente à deux autres conditions. L'une d'elles représente la condition de faisabilité à long terme proposée par Sharifnia (2.23). En effet, soit  $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ , les valeurs propres de  $\Lambda^t V_m^{-1}$ , Malhamé [10] démontre le théorème suivant:

**Théorème 3.4** *Supposons que la matrice  $\Lambda^t V_m^{-1}$  possède des valeurs propres distinctes, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1.  $\Lambda^t V_m^{-1}$  possède exactement  $(n - m)$  valeurs propres positives.
2. Soit  $\mu_1 = 0$  et  $d_n = (-1)^{(n-1)} v_1^m v_2^m v_3^m \dots \mu_2 \dots \mu_n$ , alors  $d_n > 0$
3. Soit  $\vec{\pi} = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n]^t$  l'unique vecteur de probabilité stationnaire associé à la chaîne de Markov, continue et irréductible, représentant l'état de la machine, alors  $\sum_{i=1}^m \pi_i v_i > 0 \iff \sum_{i=1}^m \pi_i \hat{u}_i > d$ , (la demande est faisable à long terme).

Dans la section suivante, nous donnerons un exemple de calcul d'une borne supérieure du temps moyen de convergence du coût vers son régime statistique stationnaire lorsque la loi à seuil critique optimale sur horizon infini est appliquée.

### 3.2 Exemple d'application

Nous avons choisi l'exemple présenté dans [25], afin de vérifier et d'appliquer la théorie présentée précédemment [20]. Il s'agit d'un système pouvant être dans trois modes de fonctionnement différents et caractérisé par:

une matrice de taux de transitions:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

un ensemble de taux de production maximaux pour chaque mode.

$$u_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{si } \alpha = 1 \\ 2 & \text{si } \alpha = 2 \\ 0 & \text{si } \alpha = 3 \end{cases},$$

La demande par unité de temps est constante.

$$d = 1.$$

Le coût instantané est mesuré par:

$$\ell(x) = \begin{cases} c^+x & \text{si } x \geq 0 \\ -c^-x & \text{sinon} \end{cases},$$

où  $c^+$  et  $c^-$  sont des constantes réelles, connues et positives

Par conséquent, les états 1 et 2 ( $u_i > d$ ,  $i = 1, 2$ ) sont faisables tandis que l'état 3 ne l'est pas. Les régions de l'espace de  $x(t)$  sont données par:

$$R_1 = \{x \mid z_1 > x > z_2\}, \quad (3.6)$$

$$R_2 = \{x \mid z_2 > x\}. \quad (3.7)$$

Pour  $\Delta = z_1 - z_2$ , les fonctions de densité de probabilité stationnaires dérivées par Sharifnia [25] sont données par:

$$f(x) = \frac{0.468}{e^{2.54\Delta} - 0.13} [e^{-2.54(x-z_1)} - 0.001e^{3.54(x-z_1)} + 0.126\delta(x-z_1)], \quad (3.8)$$



si  $z_1 \geq x > z_2$ ; et

$$f(x) = \frac{0.398e^{2.54\Delta}}{e^{2.54\Delta} - 0.13} [e^{0.54(x-z_2)} + 0.181\delta(x - z_2)], \quad (3.9)$$

si  $x \leq z_2$ ,  $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ .

Pour une telle politique, le coût moyen par unité de temps à long terme:

$$J^*(z_1, z_2) = \frac{c^+}{e^{2.54\Delta} - 0.13} V^*(z_1, z_2),$$

où

$$V^*(z_1, z_2) = \left( 1.37 + \left( \frac{c^-}{c^+} \right) e^{-0.54z_2} + z_2 - 1.3 \right) e^{2.54\Delta}, \quad (3.10)$$

$$-0.126(z_2 + \Delta) - 0.073.$$

En optimisant la relation (3.10) par rapport aux paramètres  $z_1$  et  $z_2$ , Sharifnia obtient le système d'équations suivant permettant de calculer les valeurs optimales de  $z_1$  et de  $z_2$ :

$$z_2 = 1.85 \log \left( \frac{1 + \frac{c^-}{c^+}}{1.35 - 0.17e^{-2.54\Delta}} \right), \quad (3.11)$$

$$z_1 = z_2 + \Delta. \quad (3.12)$$

Le système d'équations aux dérivées partielles (3.3) s'écrit:

$$\frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial t} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tilde{f}(x, t), \quad (3.13)$$

$$\forall x \in R_1,$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial t} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tilde{f}(x, t), \quad (3.14)$$

$$\forall x \in R_2,$$

où  $\tilde{f}(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), f_3(x, t))^T$

Les conditions frontières correspondantes sont:

$$\tilde{f}(z_1^+, t) = 0, \quad (3.15)$$

$$\dot{P}_{z_1}(t) = -4P_{z_1}(t) + f_1(z_1^-, t), \quad (3.16)$$

$$f_2(z_1^-, t) = 2P_{z_1}(t), \quad (3.17)$$

$$f_3(z_1^-, t) = 2P_{z_1}(t), \quad (3.18)$$

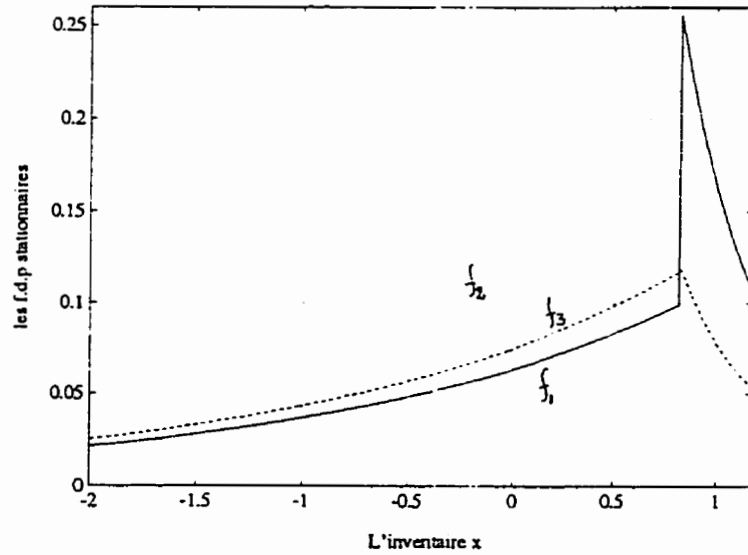
$$0 = -f_1(z_2^+, t) + f_1(z_2^-, t) + 2P_{z_2}(t), \quad (3.19)$$

$$\dot{P}_{z_2}(t) = -3P_{z_2}(t) + f_2(z_2^-, t) + f_2(z_2^-, t), \quad (3.20)$$

$$0 = f_3(z_2^+, t) - f_3(z_2^-, t) + P_{z_2}(t), \quad (3.21)$$

$$\tilde{f}(-\infty, t) = 0. \quad (3.22)$$

La résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles à été faite numériquement par la méthode de Lax-Wendroff à deux étapes. Les résultats de simulation, pour la solution en régime stationnaire, sont présentés à la figure (3.4).



**Figure 3.4:** Solution en régime stationnaire du système d'équations aux dérivées partielles décrivant les fonctions de densités de probabilité (théorèmes 3.1)

Notons que ces résultats vérifient les équations (3.8,3.9) avec une précision de 2%.

### Calcul des moments et du temps de convergence vers le régime stationnaire

Le processus de renouvellement markovien est composé de six états, soit  $1^{(0)}$ ,

$1^{(1)}, 1^{(2)}, 1^{(3)}, 2^{(0)}$  et  $2^{(3)}$ . Les expressions analytiques des probabilités de transition de la chaîne de Markov emboîtée associée et fondée sur un calcul de densité de probabilité de premier temps de passage, sont données dans [18] par:

$$\begin{aligned}
 p_{21} &= \frac{1}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{25} &= \frac{\Phi_{21}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{26} &= \frac{\Phi_{31}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{31} &= -\frac{\Phi_{12}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{35} &= \Phi_{22}^1 - \frac{\Phi_{21}^1(\Delta, 0)\Phi_{12}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{36} &= \Phi_{32}^1 - \frac{\Phi_{31}^1(\Delta, 0)\Phi_{12}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{41} &= -\frac{\Phi_{13}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{45} &= \Phi_{23}^1 - \frac{\Phi_{21}^1(\Delta, 0)\Phi_{13}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{36} &= \Phi_{33}^1 - \frac{\Phi_{31}^1(\Delta, 0)\Phi_{13}^1(\Delta, 0)}{\Phi_{11}^1(\Delta, 0)}, \\
 p_{62} &= 0.463 \\
 p_{65} &= 0.537
 \end{aligned}$$

où  $\Phi(\Delta, s) = \exp(-V^{-1}(sI - \Lambda^t)\Delta)$ ,  $I$  étant la matrice identité. Pour  $z_1 = z_1^* = 1.1758$  et  $z_2 = z_2^* = 0.8265$ , la matrice de probabilité de transitions  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0.3088 & 0 & 0 & 0 & 0.3272 & 0.3640 \\ 0.3088 & 0 & 0 & 0 & 0.4513 & 0.2398 \\ 0.2003 & 0 & 0 & 0 & 0.2071 & 0.5926 \\ 0 & 0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 \\ 0 & 0.4630 & 0 & 0 & 0.5370 & 0 \end{bmatrix}.$$

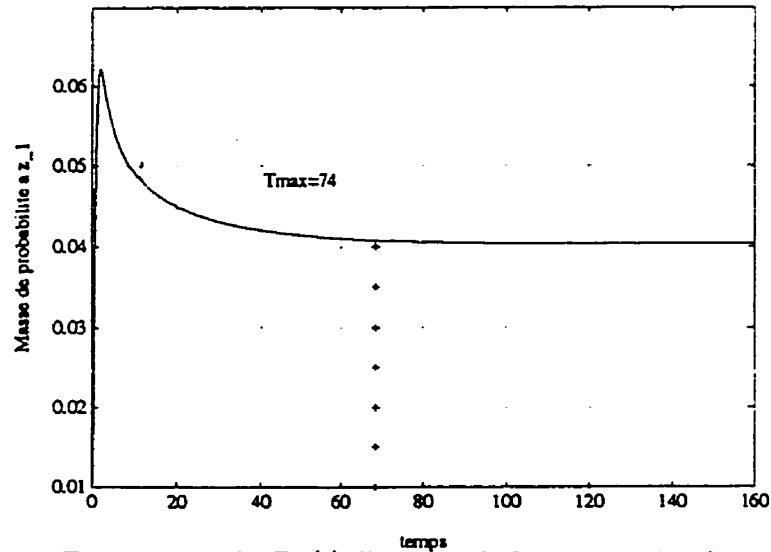
Les moyennes du temps de séjour sont données par:

$$m = \begin{bmatrix} 0.3142 \\ 0.3569 \\ 0.3655 \\ 3.7010 \end{bmatrix}.$$

La borne maximale du temps de convergence moyen vers le régime stationnaire est donnée par:

$$T_{max} = N \max(m_i) = 74 \text{ unités de temps..}$$

Observons que cette borne correspond à une erreur relative de 2% dans le coût moyen par rapport au coût moyen stationnaire (Fig.3.5)



**Figure 3.5:** Dynamique de  $P_{z_1}(t)$  illustrant la borne maximale moyenne du temps de convergence vers le régime stationnaire

### 3.3 Conclusion

Nous avons passé en revue dans ce chapitre les résultats dans [17] et [10]. Ces derniers travaux ont constitué une base essentielle pour nos recherches. Le premier critère d'ergodicité dans le théorème 3.4 nous sera utile pour le développement de conditions frontières simples à gérer dans le cas d'un système multi-mode. De plus,

pour la première fois à notre connaissance une mise en évidence et une analyse de la structure de renouvellement du processus de surplus contrôlés par lois de commande à points critiques ont été effectuées. Ceci a permis, de construire une chaîne de Markov emboîtée dont le calcul exact de la matrice de transition a rendu possible une estimation d'une borne supérieure du temps moyen de convergence des coût vers le régime stationnaire. Cette borne supérieure possède le désavantage d'être uniquement une borne sur la moyenne du temps de convergence et pourrait perdre son intérêt si la variance du temps de convergence est élevée. De plus, elle représente la vitesse de convergence des statistiques du processus hybride  $[x(t), \alpha(t)]^t$  et non de la fonctionnelle coût calculée le long d'une réalisation et qui aura en général un temps de convergence plus long.

Dans le prochain chapitre nous allons présenter les résultats constituant notre première contribution où nous nous intéressons à l'optimisation des politiques à points critiques sur horizon fini, et l'estimation du temps de convergence vers le régime stationnaire de la fonctionnelle coût.

## CHAPITRE IV

# UTILISATION DES APPROXIMANTS DE PADÉ POUR L'ANALYSE TRANSITOIRE

Ce chapitre est consacré à la planification sur horizon fini de la production d'un atelier de fabrication mono-pièce. L'importance de cette planification qui peut être à court ou à moyen terme émerge d'un besoin réel. En effet, dans diverses applications industrielles, plusieurs problèmes d'optimisation du fonctionnement des ateliers de fabrication sont des problèmes sur un horizon fini. Souvent, pour un objectif à moyen ou à court terme le responsable de la gestion, soucieux de s'adapter rapidement à l'évolution du marché, est plus intéressé à trouver des stratégies optimales ou sous-optimales pour une durée finie que celle d'un futur éloigné. Deux questions (non indépendantes) se posent alors:

- Étant donné la disponibilité de solutions analytiques optimales (mono-pièce) ou sous-optimales (multi-pièce) sur horizon fini, quelle doit être la plus petite valeur de la longueur de l'horizon  $T$  à partir de laquelle on peut utiliser sans trop de pertes d'optimalité la politique correspondant à l'horizon infini?
- Pour la classe de politiques de contrôle à points critiques invariants sur un horizon fini, comment calculer les seuils optimaux et de quelle manière dépendent-ils de la longueur de l'intervalle d'optimisation?

Dans [17], Malhamé et Boukas ont apporté une réponse partielle à la première question. Nous avons présenté les résultats correspondant au chapitre III. Dans ce chapitre, nous apporterons des méthodes plus précises de calcul de durée des transitoires. Ainsi, nous développons d'abord des résultats pour la plupart originaux permettant l'estimation de la fonctionnelle coût et par suite son optimisation sur un horizon fini. L'apport constitue un raffinement et une précision supplémentaire

importante par rapport à l'analyse en régime stationnaire telle que présentée par [1], [25] et [27]. De plus, l'analyse transitoire est enrichie par *une étude des singularités*. Le but de cette étude est de mieux caractériser la vitesse avec laquelle le système atteint son régime stationnaire sous l'action de politiques à points critiques invariants.

L'article intitulé "Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing" mis en annexe constitue le corps de ce chapitre.

#### 4.1 Formulation du problème

Nous considérons un atelier de fabrication flexible pouvant être dans  $n$  différents modes de fonctionnement. Ces différents modes sont représentés par une chaîne de Markov irréductible et à états continus  $\alpha(t)$ . La matrice de transition de  $\alpha(t)$  est une matrice constante  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$  (avec  $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}$ ). L'atelier produit un seul type de pièce afin de satisfaire une demande constante de taux  $d$ . Le niveau d'inventaire de pièces au temps  $t$  est modélisé par une variable continue  $x(t)$ . Pour chaque mode  $\alpha$ ,  $x(t)$  évolue selon l'équation dynamique donnée par:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u_\alpha - d, \quad (4.1)$$

où  $u_\alpha$  est le taux de production quand l'atelier est en mode  $\alpha$ . La valeur de  $u_\alpha$  appartient à un espace convexe  $\Omega_\alpha$  considéré dans le cas présent comme étant l'intervalle  $[0, u_{\alpha \max}]$ .  $u_{\alpha \max}$  est le taux de production maximal permis selon la capacité disponible quand l'atelier est au mode  $\alpha$ . On suppose que parmi les  $n$  différents modes, il existe  $m$  modes faisables ( $u_{\alpha \max} > d$ ). Ces modes seront indexés de  $1, \dots, m$ , quant aux autres modes ils seront indexés de  $m+1, \dots, n$ . Un coût convexe  $\ell(x)$  pénalise le niveau d'inventaire (négatif ou positif). L'objectif est de déterminer une politique de production en boucle fermée qui minimise le coût sur horizon fini suivant:

$$J(x_0, \alpha_0) = E \left[ \int_0^T \ell(x) dt \Big|_{x_0, \alpha_0} \right] \quad (4.2)$$

où  $T$  représente la longueur de l'horizon et  $E[\cdot|_{x_0, \alpha_0}]$  est l'opérateur d'espérance conditionnelle à l'état hybride initiale  $[x(0), \alpha(0)]^t = [x_0, \alpha_0]^t$ . Rappelons que dans le chapitre précédent on a vu que, lorsque l'horizon est fini [15]:

- la politique optimale demeure de type seuils critiques.
- ces seuils varient en fonction du temps et constitue plutôt des courbes critiques.
- une caractérisation analytique de la politique optimale est jusqu'à nouvel ordre impossible.

Pour contourner ces difficultés d'ordre analytique, les recherches seront confinées à la classe (sous-optimale) de *politiques à points critiques invariants*.

La justification de ce choix se résume dans les trois raisons suivantes:

- cette classe inclut asymptotiquement la classe optimale exacte quand  $T \rightarrow \infty$ ;
- un point critique constant peut être vu comme approximativement équivalent à une moyenne sur un horizon  $T$  d'un point critique variant dans le temps;
- L'implantation de la loi de contrôle en atelier demeure simple.

Sous ces politiques, il est alors possible d'utiliser certains parmi les résultats de Malhamé et Boukas [19] rapportés au chapitre III, pour caractériser le transitoire. Dans la section suivante nous présentons une méthode de calcul des fonctions de densité de premier temps de passage (ou de retour) qui se révèlera très utile dans le développement de nos résultats.



## 4.2 Méthode des courants de probabilité et calcul des fonctions de densité du premier temps de retour

Dans [10], Malhamé montre comment dans le cas des processus de Markov à trajectoires continues, les équations de Kolmogorov peuvent être utilisées pour calculer les densités de premier temps de passage. Le principe est le suivant:

Un processus de Markov continu ne peut atteindre une frontière donnée à l'instant  $t$  que s'il est dans son voisinage immédiat à l'instant  $t - dt$ ,  $dt$  infinitésimal. Avant qu'il atteigne cette frontière et qu'il ne soit alors arrêté, le processus ne peut "connaître" son existence et continue donc à satisfaire les équations de Kolmogorov ordinaire. Une fois la frontière atteinte le processus doit être éliminé (puisque'il s'agit d'un calcul de premier temps de passage) . Mathématiquement, ceci revient à introduire à la frontière d'intérêt une nouvelle condition qui assure que les courants de probabilités de retour émanant de cette frontière soient mis à zéro. Ainsi la frontière est dite absorbante. Le système n'est plus conservateur et présente *des pertes de probabilités*. De plus, si la probabilité que le système atteigne la frontière éventuellement est égale à 1, la probabilité totale résiduelle à l'intérieur du système quand  $T \rightarrow \infty$  est égale à zéro. Puisque, les premiers passages par la frontière d'intérêt ne peuvent être possibles qu'à partir de son voisinage immédiat, la probabilité que le processus traverse la frontière entre  $t$  et  $t + dt$ , notée  $g(t) dt$ , pour tout  $t > 0$  et  $dt$  infinitésimal,  $g(t)$  étant la densité de probabilité du premier temps de passage à la frontière et à l'instant  $t$ , est donnée par la quantité de probabilité s'échappant à travers la frontière autour de  $t$ . Ceci n'est rien d'autre que le courant de probabilité net à la frontière multiplié par  $dt$ . Étant donné que le courant de probabilité est éliminé à la frontière absorbante nous concluons que  $g(t) \equiv$  courant de probabilité s'échappant de la frontière. Cette analyse prend le nom de *la méthode des courants de probabilité*.

Si l'on désire à présent calculer la densité de probabilité du premier temps de retour du surplus  $x(t)$  à un seuil critique  $z_i$ ,  $i$  donné, et dans le mode  $i$  (nous nous référons à un tel événement comme un événement critique de type  $i$ ), le principe

décrit précédemment dicte une modification des conditions frontières à  $z_i$ . Il faut que chaque trajectoire qui atteint ce  $z_i$  en mode  $\alpha = i$ , soit éliminée. En d'autres termes, une condition absorbante doit être instaurée à  $z_i$  et elle ne peut être active que si la partie discrète de l'état hybride est  $i$ . Ceci est équivalent à affirmer que la condition frontière doit inclure  $f_i(z_i^+, t)$  et  $f_i(z_i^-, t)$ . En reconsidérant (3.4b) ainsi que son sens physique dans le chapitre précédent, la quantité  $v_i^i f_i(z_i^-, t) - v_i^{i-1} f_i(z_i^+, t)$  est précisément la probabilité de retour totale à la frontière  $z_i$  à l'état  $i$ . La condition d'absorption requise est réalisée si ce courant de probabilité de retour est éliminé. Ainsi, pour un  $i$  particulier, (3.5b) doit être écrite cette fois-ci:

$$\frac{dP_{z_i}(t)}{dt} = \lambda_{ii} P_{z_i}(t) . \quad (3.4b')$$

La fonction de densité de probabilité  $g_{ii}(t)$  à l'instant  $t$  est simplement le taux auquel la probabilité s'échappe à la frontière absorbante. Ceci nous amène à conclure que  $g_{ii}(t)$  est égale à la probabilité totale  $v_i^i f_i(z_i^-, t) - v_i^{i-1} f_i(z_i^+, t)$  qui est éliminée. Nous avons donc le lemme suivant:

**Lemme 4.1** *La fonction de densité de probabilité du temps entre les événements critiques de type  $i^*$ ,  $g_{i^*i^*}(t)$  pour  $i^* = 1, \dots, m$ , peut être obtenue du système d'équations aux dérivées partielles avec les conditions frontières (3.3), (3.4a) and (3.4b), excepté que pour  $i = i^*$ , la condition frontière (3.4b) doit être écrite:*

$$\frac{dP_{z_{i^*}}(t)}{dt} = \lambda_{i^*i^*} P_{z_{i^*}}(t).$$

*Les conditions initiales sont:*

$$\begin{aligned} P_{z_{i^*}}(0) &= 1, \\ f_i(x, 0) &= 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad \forall x \in R_j; \quad j = 1, \dots, m, \\ P_{z_i}(0) &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m, \quad i \neq i^*, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$g_{i^*i^*}(t)$  est donnée par:

$$g_{i^*i^*}(t) = v_{i^*}^{i^*} f_{i^*}(z_{i^*}^-, t) - v_{i^*}^{i^*-1} f_{i^*}(z_{i^*}^+, t).$$

À la section 4.3 nous développons une équation de renouvellement qui constitue le fondement de l'analyse de la performance des lois à seuils critiques sur horizon fini.

### 4.3 Équation de renouvellement du coût

Les temps de retour successifs à un seuil critique  $z_i$  dans le mode  $i$  constituent d'un point de vue stochastique des instants de régénération. Sachant que  $x(0) = z_i$  et  $\alpha(0) = i$ , définissons alors le processus  $x(t)$  indiscernable de  $\tilde{x}(t)$  jusqu'au moment de la première régénération  $\tau$  après quoi  $\tilde{x}(t) = 0$  ( $\tilde{x}(t)$  est éliminé après la première régénération). Cette élimination coïncide en réalité avec le fait que  $x(t)$  atteint son point critique  $z_i$  dans le mode  $i$  pour la première fois après l'avoir quitté. Pour le processus  $\tilde{x}(t)$ ,  $z_i$  agit donc comme une barrière absorbante au sens du lemme précédent. Par conséquent,  $\tilde{x}(t)$  possède les mêmes caractéristiques statistiques que  $x(t)$  et satisfait de ce fait les mêmes équations de Kolmogorov avec toutefois les conditions frontières modifiées (3.4b'). Lorsque dans (4.2), les conditions initiales sont  $x(0) = z_i$  et  $\alpha(0) = i$ , le coût résultant sera dénoté  $C_i(T)$  et appelé fonctionnelle coût de type  $i$  pour une longueur d'horizon  $T$ . Le coût pouvant s'écrire comme la somme des coûts de 0 à  $\min(\tau, T)$  et de  $\tau$  à  $T$  si  $\tau < T$ , nous avons le théorème suivant:

**Théorème 4.1** *La fonctionnelle coût de type  $i$  pour une longueur d'horizon  $T$  associée à une politique de production à seuils critiques invariants (1.1), et pour un indice  $i$  fixé dans  $1, 2, \dots, m$ , satisfait l'équation de renouvellement suivante.*

$$C_i(T) = \int_0^T E \left[ \ell(\tilde{x}(\tau)) |_{\alpha=i, \tilde{x}(0)=z_i} \right] d\tau + \int_0^T C_i(T - \tau) g_{ii}(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

où la fonction de densité de probabilité  $g_{ii}(t)$  est calculée selon le lemme 4.1, et où le processus hybride  $[\tilde{x}(t), \alpha(t)]$  évolue statistiquement selon les mêmes équations directes de Kolmogorov et respectent les mêmes conditions frontières que dans le dit lemme, avec les conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} P_{z_i}(0) &= 1, \\ f_i(x, 0) &= 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad \forall x \in R_j; \quad j = 1, \dots, m, \\ P_{z_j}(0) &= 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Ce résultat est fondamental et sert à caractériser la dépendance qui existe entre le coût sur horizon fini et la longueur de l'horizon  $T$ . Cette dernière équation

comporte deux termes importants. Le premier correspond à la contribution de toutes les trajectoires jusqu'à leur premier temps de retour à  $z_i$  dans le mode  $i$ , ainsi que celles qui n'ont pas atteint  $z_i$  dans l'état  $i$  à l'instant  $T$ . Le deuxième représente la contribution après la première régénération. Vue l'intégral de convolution qui apparaît dans le terme de droite de l'équation (4.4), l'utilisation de la technique de la transformée de Laplace s'avère appropriée. En effet, si nous définissons,  $F_j(x, s)$ ,  $G_{ii}(s)$  et  $C_i(s)$  comme étant les transformées de Laplace de  $f_j(x, t)$ ,  $g_{ii}(t)$  and  $C_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , respectivement, alors après prise de transformée de Laplace de l'équation de renouvellement (4.4) donne:

$$C_i(s) = \frac{1}{s} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \ell(x) F_j(x, s) dx + \sum_{j=1}^m \ell(z_i) P_{z_j}(s)}{1 - G_{ii}(s)}. \quad (4.5)$$

La détermination de la transformée de Laplace inverse de (4.5) est en général très difficiles, sinon impossible analytiquement. Pour contourner cette difficulté nous calculons une expansion en série infinie de  $C_i(s)$  autour de  $s = 0$ . L'analyticité à  $s = 0$  de toutes les transformés de Laplace des fonctions apparaissant dans (4.5) est assurée lorsque le processus de surplus contrôlé est ergodique. La démonstration est présentée l'annexe A de l'article dans l'annexe II. Le développement de  $G_{ii}(s)$  en série de Taylor autour de  $s = 0$  est donné par:

$$G_{ii}(s) = 1 - \mu s + \frac{\mu_2}{2} s^2 + \dots + (-1)^k \frac{\mu_k}{k!} s^k + \dots \quad (4.6)$$

où  $\mu = E[\tau]$ , et  $\mu_k = E[\tau^k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , et où  $\tau$  est la variable aléatoire représentant le premier temps de retour. Définissons:

$$\bar{m}_k(x) = (-1)^k \left. \frac{\partial^k \bar{F}(x, s)}{\partial s^k} \right|_{s=0} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \forall x \in R_i, \quad (4.7)$$

$$\text{et } m_{i,k} = \left. \frac{\partial^k P_{z_i}(s)}{\partial s^k} \right|_{s=0} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.8)$$

$\bar{m}_k(x)$  représente le vecteur des moments d'ordre  $k$  associés au vecteur de fonctions densités de probabilité  $\bar{f}(x, s)$  à  $z_{i+1} < x < z_i$ .  $m_{i,k}$  représente le moment d'ordre  $k$  de la durée de séjour à  $x = z_i$ . Le développement en série de Laurent infinie de  $C_i^*(s)$  autour de  $s = 0$ , donne:

$$C_i^*(s) = \frac{1}{s^2 \mu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) 1^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \bar{m}_k(x) dx \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} m_{i,k} \ell(z_i) \left\} \frac{s^k}{k!} \frac{1}{\left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu} (-1)^n \frac{s^{k-1}}{k!}\right]} , \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{s^2 \mu} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_{i,k} s^k}{\left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu} (-1)^k \frac{s^{k-1}}{k!}\right]} , \quad (4.10)$$

où  $1^t = [1 \dots 1] \in \mathbb{R}^n$ , et

$$C_{i,k} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) 1^t (-1)^k \bar{m}_k(x) dx + \sum_{i=1}^m m_{i,k} \ell(z_i) \right\} \frac{1}{k!} . \quad (4.11)$$

Notons cependant que la valeur de  $C_{i,0}$  est indépendante de la condition initiale représenté par l'événement  $i$  (voir [14], corollaire 1). Par conséquent, le coût en régime stationnaire sera noté  $C_{\infty} = \frac{C_{i,0}}{\mu}$  (expression de Bielecki et Kumar [27] dans le cas  $n = 2$ ). L'évaluation de (4.11) requiert évidemment de pouvoir déterminer les différents moments qui y apparaissent.

**Lemme 4.2** *Soit  $\bar{m}_q(x)$  le vecteur des moments d'ordre  $q$  correspondant au vecteur des fonctions de densités de probabilité  $\bar{f}(x,t)$ ,  $q \geq 0$ . Sous le critère d'ergodicité(2.23), et pour  $\bar{f}(x,0) = 0 \forall x \in R_i$ , le vecteur  $\bar{m}_q(x)$  satisfait le système d'équations différentielles suivants:*

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}_q(x)}{dx} &= V_i^{-1} \Lambda^t \bar{m}_q(x) + q V_i^{-1} \bar{m}_{q-1}(x) \quad \forall x \in R_i \\ q &= 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}_0(x)}{dx} &= V_i^{-1} \Lambda^t \bar{m}_0(x) \quad \forall x \in R_i \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Définissons

$$\bar{\Gamma}_k(x)^t = [\bar{m}_0^t(x), \bar{m}_1^t(x), \bar{m}_2^t(x), \dots, \bar{m}_k^t(x)] ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

$\bar{\Gamma}_k(x)$  obéit au système d'équations différentielles suivant:

$$\frac{d\bar{\Gamma}_k(x)}{dx} = A_{i,k} \bar{\Gamma}_k(x)$$

$$= \begin{bmatrix} V_i^{-1} \Lambda^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ V_i^{-1} & V_i^{-1} \Lambda^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 * V_i^{-1} & V_i^{-1} \Lambda^t & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & k * V_i^{-1} & V_i^{-1} \Lambda^t \end{bmatrix} \bar{\Gamma}_k(x) . \quad (4.15)$$

Par suite:

$$\bar{\Gamma}_k(x) = \exp(A_{i,k} * (x - z_i)) \bar{\Gamma}_k(z_i^-) \quad \forall x \in R_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.16)$$

avec,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\Gamma}_k(x) = 0, \quad (4.16a)$$

$$\text{et } \bar{\Gamma}_k(x) = 0 \quad \forall x \in R_0 \quad (4.16b)$$

$$\text{pour } k = 1, 2, \dots$$

La démarche globale pour les calculs des coefficients de l'expansion peut être résumée dans le théorème suivant:

**Théorème 4.2** *Soit  $i$  l'état de régénération the régénération (pour un certain  $i = 1, 2, \dots, m$ ). les coefficients de l'expansion en série infinie jusqu'à l'ordre  $k$  de la transformée de Laplace de la fonctionnelle coût  $C_i(s)$  sont obtenus comme suit.*

1. Initialiser le vecteur des moments à  $z_1$ , (en terme de l'unique composante inconnue  $m_{1,0}$  si  $i \neq 1$ , ou  $m_{1,0}(z_1^-)$  si  $i = 1$ ) - Pour  $i \neq 1$

$$\begin{cases} \lambda_{11} m_{1,0} + v_1^1 m_{1,0}(z_1^-) = 0 \\ \lambda_{1\alpha} m_{1,0} + v_\alpha^1 m_{\alpha,0}(z_1^-) = 0 \\ \alpha \in [2, \dots, n], \end{cases} \quad (4.17a)$$

et

$$\begin{cases} \lambda_{1\alpha} m_{1,q} + v_\alpha^1 m_{\alpha,q}(z_1^-) = 0 \\ \alpha \in [2, \dots, n], \\ \lambda_{11} m_{1,q} - q m_{1,q-1} + v_1^1 m_{1,q}(z_1^-) = 0 \quad \alpha = 1; \\ \text{pour } q = 1, \dots, k, \end{cases} \quad (4.18a)$$

- Pour  $i = 1$

$$m_{1,q} = \frac{q!}{(-\lambda_{11})^{q+1}} \quad q = 0, 1, \dots, k \quad (4.17b)$$

$$\lambda_{1\alpha} m_{1,q} + v_\alpha^1 m_{\alpha,q}(z_1^-) = 0 \quad (4.18b)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha \neq 1 \quad q = 0, 1, \dots, k.$$

Les seuls paramètres inconnus à gauche de l'équation (4.18a-b) sont les valeurs scalaires  $m_{1,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , si  $i \neq 1$  ou  $m_{1,q}(z_1^-)$ ,  $q = 1, \dots, k$ , si  $i = 1$ . Notons que  $m_{\alpha,q}(x)$  est la  $\alpha^{\text{ième}}$  composante de  $\vec{m}_q(x)$ .

2. Propager le vecteur initial  $\vec{\Gamma}_k(z_1^-)$  en utilisant (4.16), donnant ainsi:

$$\vec{m}_q(z_1^-) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_{11}}{v_2^1} \\ \frac{-\lambda_{12}}{v_2^1} \\ \vdots \\ \frac{-\lambda_{1n}}{v_n^1} \end{bmatrix} m_{1,q}, \text{ si } i \neq 1 \text{ et } \vec{m}_q(z_1^-) = \begin{bmatrix} m_{1,q}(z_1^-) \\ \frac{-\lambda_{12}}{v_2^1} m_{1,q}(z_1^-) \\ \vdots \\ \frac{-\lambda_{1n}}{v_n^1} m_{1,q}(z_1^-) \end{bmatrix} \\ \text{si } i = 1, \quad q = 0, 1, \dots, k.$$

$$\vec{\Gamma}_0(z_1^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \frac{v_1^1}{v_2^1} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{11}} \frac{v_1^1}{v_n^1} \end{bmatrix} m_{1,0}(z_1^-) \quad \text{pour } q = 0,$$

$\vec{\Gamma}_k$  étant défini dans (4.14):

$$\vec{\Gamma}_k(z_2^+) = \exp(-A_{1,k} * (z_1 - z_2)) \vec{\Gamma}_k(z_1^-) \quad k \geq 0. \quad (4.19)$$

À ce stade, toutes les valeurs à  $z_2^+$  sont exprimées en fonction de  $m_{1,q}(z_1^-)$ ,  $q = 0, \dots, k$  si  $i \neq 1$  ou  $m_{1,q}(z_1^-)$ ,  $q = 0, \dots, k$  si  $i = 1$ .  $\vec{\Gamma}_k(z_2^-)$  est alors déterminé en résolvant les équations suivantes:

- Pour  $i \neq 2$

$$\begin{cases} \lambda_{2\alpha} m_{2,q} + v_\alpha^2 m_{\alpha,q}(z_2^-) - v_\alpha^1 m_{\alpha,q}(z_2^+) = 0 \\ \alpha = 1, \dots, n \quad \alpha \neq 2, \quad \text{pour } q = 0, \dots, k. \\ \lambda_{22} m_{2,q} - q m_{2,q-1} + v_2^2 m_{2,q}(z_2^-) - v_2^1 m_{2,q}(z_2^+) = 0 \\ \text{pour } q = 1, \dots, k, \\ \lambda_{22} m_{2,0} + v_2^2 m_{2,0}(z_2^-) - v_2^1 m_{2,0}(z_2^+) = 0 \\ \text{pour } q = 0. \end{cases} \quad (4.20a)$$

- Pour  $i = 2$

$$m_{2,q} = \frac{q!}{(-\lambda_{22})^{q+1}} \quad q = 0, 1, \dots, k. \quad (4.20b)$$

En combinant (4.19) et (4.20a) l'ensemble des inconnues additionnelles est respectivement  $m_{2,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$  si  $i \neq 1$  ou  $m_{2,q}(z_2^-)$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , si  $i = 1$ .

3. Répéter l'étape 2 avec  $A_{j,k}$  au lieu de  $A_{1,k}$  dans (4.19),  $z_j$  au lieu de  $z_1$  et  $z_{j+1}$  au lieu  $z_2$ . De plus, (4.20a) et (4.20b) sont remplacées par:

- pour  $j \neq i$  qui n'est pas un état de régénération:

$$\begin{cases} \lambda_{j\alpha} m_{j,q} + v_{\alpha}^j m_{\alpha,q}(z_j^-) - v_{\alpha}^{j-1} m_{\alpha,q}(z_j^+) = 0 \\ \alpha = 1, \dots, n \quad \alpha \neq j, \quad \text{pour } q = 0, 1, \dots, k, \\ \lambda_{j,j} m_{j,q} - q m_{j,q-1} + v_j^j m_{j,q}(z_j^-) - v_j^{j-1} m_{j,q}(z_j^+) = 0 \\ \text{pour } q = 1, \dots, k, \\ \lambda_{j,j} m_{j,0} + v_j^j m_{j,0}(z_j^-) - v_j^{j-1} m_{j,0}(z_j^+) = 0 \\ \text{pour } q = 0. \end{cases} \quad (4.21a)$$

- pour  $j = i$

$$m_{i,q} = \frac{q!}{(-\lambda_{ii})^{q+1}} \quad q = 0, 1, \dots, k,$$

pour  $\alpha \neq i$

$$\begin{aligned} \lambda_{i\alpha} m_{i,q} + v_{\alpha}^i m_{\alpha,q}(z_i^-) - v_{\alpha}^{i-1} m_{\alpha,q}(z_i^+) &= 0 \\ \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad \text{pour } q = 0, 1, \dots, k \end{aligned} \quad (4.21b)$$

Pour chaque valeur de  $j$ , les inconnues additionnelles sont soit  $m_{j,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , si  $j \neq i$ , ou  $m_{j,q}(z_j^-)$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , si  $j = i$ .

4. À  $z_m$ ,  $\Gamma_k(z_m^-)$  doit satisfaire la condition d'orthogonalité suivante:

$$\begin{bmatrix} w'_{1,l} \\ w'_{2,l} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ w'_{m-1,l} \\ w'_{m,l} \end{bmatrix} \cdot \bar{\Gamma}_k(z_m^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$j = 1, \dots, m, \quad l = 0, \dots, k,$$

où  $w'_{j,l}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $l = 0, 1, \dots, k$  représentent les vecteurs propres à gauche généralisés de grade  $l$  de  $A_{m,k}$  associés avec les  $m$  valeurs propres à partie réelle non positive. Une fois  $\bar{m}_q(x)$  et  $m_{j,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, m$ , sont connus,  $C_{i,q}$  pour  $q = 0, 1, \dots, k$  sont obtenus par intégration sur  $x$  selon l'équation (4.11)



#### 4.4 Les approximants de Padé pour l'estimation de $C_i(s)$

Notre objectif principal est d'estimer le coût sur horizon fini sous une politique à seuils critiques invariants. Les approximants de Padé représentent un outil communément utilisé pour la construction d'une approximation rationnelle d'une fonction [3]. L'idée principale derrière l'utilisation de cette technique d'estimation est de pouvoir reproduire les séries de Taylor de la transformée de Laplace des fonctions aussi loin que possible. Ainsi, l'utilisation des approximants de Padé permet de construire une fraction rationnelle  $\frac{P_{p+\nu}(s)}{Q_p(s)}$  qui reproduit partiellement (premiers  $2p + \nu$  coefficients) les séries de Taylor apparaissant au numérateur et au dénominateur de la transformée de Laplace de  $C_i^*(s)$  (4.10).  $P_{p+\nu}(s)$  et  $Q_p(s)$  sont des polynômes de degré  $p + \nu$  et  $p$  respectivement,  $\nu \geq (-1)$  [3]. Sachant que lorsque  $s \rightarrow 0$  dans une transformée de Laplace c'est le comportement à  $T \rightarrow \infty$  qui est capturé, la transformation inverse des fractions rationnelles fournit une estimation du coût sur horizon fini pour une politique à seuils critiques donnée qui s'améliore pour un degré d'approximation donné lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Il est donc possible d'évaluer la performance pour un choix particulier de seuils. La recherche de la commande sous-optimale devient un problème d'optimisation numérique. Ceci permet de répondre à la deuxième question posée en introduction. Pour répondre à la première question concernant la vitesse de convergence vers le régime stationnaire, un indicateur important est fourni par les singularités (pôles où points de branchement) de la transformée de Laplace  $C_i^*(s)$ .

#### 4.5 Estimation du temps de convergence vers le régime stationnaire par l'analyse des singularités

L'objectif de cette section est de caractériser la vitesse de convergence de la fonctionnelle coût vers le régime stationnaire à partir de l'analyse des singularités. En effet, la vitesse de convergence vers le régime stationnaire est dictée d'abord par le pôle dominant (le pôle le plus proche de l'axe imaginaire dans le plan complexe).

Notons que les pôles de la transformée de Laplace de  $C_i^*(s)$  sont composés du pôle  $s = 0$  et des pôles  $p_j$  solutions  $1 - G_{ii}(s) = 0$ .

#### 4.5.1 Caractérisation des pôles

Il est clair que  $s = 0$  est aussi une solution de  $1 - G_{ii}(s) = 0$  (puisque  $G_{ii}(0) = 1$ ), et par suite  $s = 0$  représente *un pôle double* de  $C_i^*(s)$  indiquant une croissance linéaire de  $C_i(T)$  avec  $T$ . De plus,  $C_i^*(s)$  possède d'autres pôles caractérisés en partie par le théorème suivant:

**Théorème 4.3** *les valeurs propres de la matrice de taux de transitions  $\Lambda$  de la chaîne de Markov représentant l'état de la machine sont également solutions de l'équation:*

$$1 - G_{ii}(s) = 0.$$

*De plus, dans le cas  $n = 2$ , ce sont les seules solutions de cette équation.*

**Démonstration:** voir annexe I. ■

Ceci implique que si on considère le coût moyen  $\frac{1}{T} C_i(T)$ , il ne peut atteindre son régime stationnaire plus rapidement que les statistiques de la chaîne de Markov de l'état de la machine considérée. Ceci permet de définir une borne inférieure sur la longueur de l'horizon après laquelle on peut espérer que les points d'inventaire optimaux [27] où [25] deviennent des approximations acceptables des points réels. Nous avons donc:

**Corollaire 4.1** *Dans le cas ergodique  $\left(\frac{C_i(T)}{T} - C_\infty\right)$  est au moins  $O(\exp(\lambda_{\min} t))$  où  $\lambda_{\min}$  est la valeur propre non nulle et dominante de la matrice de transition de la chaîne de Markov représentant le mode de la machine,  $C_\infty$  étant le coût stationnaire par unité de temps.*

#### 4.5.2 Caractérisation des points de branchements

**Corollaire 4.2** Les point de branchement de  $\gamma$  solution de

$$|\gamma I + V_i^{-1}(sI - \Lambda^T)| = 0$$

sont les seuls points de branchement de  $G_{ii}(s)$ .

Le calcul de ces points de branchement peut se faire en utilisant la notion de discriminant d'un polynôme. Soit

$$P(\gamma, s) = \gamma^n + a_{n-1}(s)\gamma^{n-1} + \dots + a_0(s)$$

et soit  $\gamma(s)$  une solution de  $P(\gamma, s) = 0$ .  $s_0$  est un point de branchement de  $\gamma(s)$  si  $\gamma(s_0)$  est une solution multiple de  $P(\gamma(s_0), s_0) = 0$  [6]. Ce qui revient à dire que le déterminant de la matrice de Vandermonde est égale à 0 pour  $s = s_0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_1^n \\ 1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \dots & \gamma_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\gamma_i - \gamma_j)$$

Soit alors  $\sigma_k = \gamma_1^k + \dots + \gamma_n^k$  et soit

$$D_p = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \dots & \sigma_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$D_p$  est un polynôme en  $s$  appelé discriminant du polynôme  $P(\gamma)$ . Les valeurs de  $s$  qui sont solution de  $D_p(s) = 0$  sont les point de branchements de  $\gamma(s)$ . De plus, le calcul des  $\sigma_i$  peut se faire en évitant de résoudre  $P(\gamma) = 0$ . En effet, le calcul des  $\sigma_i$  peut se faire en résolvant le système linéaire suivant

$$\begin{aligned} a_{n-1}(s) + a_n(s)\sigma_1 &= 0 \\ 2a_{n-2}(s) + a_{n-1}(s)\sigma_1 + a_n(s)\sigma_2 &= 0 \\ &\vdots \\ (n-1)a_1(s) + a_2(s)\sigma_1 + \dots + a_n(s)\sigma_{n-1} &= 0 \text{ pour } i \leq n-1 \end{aligned}$$

pour  $i \geq n$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= -[a_0 \dots a_{n-1}] [\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}]^T \\ \sigma_{n+1} &= -[a_0 \dots a_{n-1}] [\sigma_1 \dots \sigma_n]^T \\ &\vdots \\ \sigma_{2n-2} &= -[a_0 \dots a_{n-1}] [\sigma_{n-2} \dots \sigma_{2n-3}]^T\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire la décomposition asymptotique de  $C_i^*(s)$  sous la forme suivante [2],  $B_1$  étant défini comme le point de branchement le plus proche de l'axe imaginaire:

$$\begin{aligned}C_i^*(s) &= \frac{C_\infty}{s^2} + \left[ \frac{C_{i,1} + C_\infty \frac{\mu^2}{2}}{\mu} \right] \frac{1}{s} \\ &+ \sum_{i:p_i \neq 0} \{ \text{residu du pôle } p_i \neq 0 \text{ si } |p_i| < |B_1| \} \\ &+ \{ \text{Une série de Taylor de } C_i^*(s) \text{ autour de } s = B_1 \}\end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned}\frac{C_i(T)}{T} &= C_\infty + \left[ \frac{C_{i,1} + C_\infty \frac{\mu^2}{2}}{\mu} \right] \frac{1}{T} \\ &+ \sum_{i:p_i \neq 0} \{ \text{contribution des pôles } p_i \neq 0 \} \\ &+ \{ \text{la contribution de la série de Taylor autour de } B_1 \}\end{aligned} \quad (4.23)$$

L'existence des singularités  $p_i \neq 0$  à l'intérieur du cercle de rayon  $|B_1|$  est très difficile à prouver analytiquement. Cependant, il est établi que les approximants de Padé permettent de construire les singularités se trouvant à l'intérieur de la région de convergence représentée par le cercle de rayon  $|B_1|$  [3]. En plus de ces singularités, les approximants de Padé auront tendance à créer une concentration de pôles et de zéros sur *la branche ouverte reliant les points de branchements*. Les plus proches de l'axe des imaginaires. Notons que ces pôles et ces zéros n'existent pas en réalité mais leur apparition dans le calcul est révélatrice de la présence de points de branchement. Par ailleurs, nous pouvons observer de l'équation (4.23) qu'en réalité le terme vraiment dominant et qui dictera la vitesse de convergence vers le régime stationnaire est celui en  $\frac{C_{i,1} + C_\infty \frac{\mu^2}{2}}{\mu s}$ . Ce qui correspond si nous calculons le coût moyen par unité de temps à  $\left[ \frac{C_{i,1} + C_\infty \frac{\mu^2}{2}}{\mu} \right] \frac{1}{T}$ . L'erreur relative introduite sur

l'évaluation du coût stationnaire par la considération de ce terme est donnée par  $\left[ \frac{C_{i,1} + C_{\infty} \frac{\mu_2}{2}}{C_{\infty} \mu} \right] \frac{1}{T}$ . Il est donc possible de définir un degré de tolérance sur la longueur de l'horizon à partir de laquelle il est acceptable de considérer le système en régime stationnaire. Ce qui donne la proposition suivante:

**Proposition 4.5.1** *la longueur minimale de l'horizon qu'il faut attendre pour que le coût soit à l'intérieur de la bande de  $\varepsilon_s$  (en %) par rapport à la valeur en régime stationnaire  $C_{\infty}$  est donnée par*

$$T_{s \min} = \left[ \frac{C_{i,1} + C_{\infty} \frac{\mu_2}{2}}{C_{\infty} \mu} \right] \frac{1}{\varepsilon_s} \quad (4.24)$$

où  $C_{i,1}$  est donné par (4.10), et  $C_{\infty}$  est le coût stationnaire.  $\mu$  et  $\mu_2$  sont donnés par (4.6), et représentent la moyenne et le deuxième moment du premier temps inter-événements critiques de type  $i$ .

Notons que  $T_{s \min}$  dépend nécessairement du choix des points critiques, des vitesses de production ainsi que des pénalités attribuées aux surplus négatifs ou positifs respectivement. L'application de la décomposition (4.23) pour l'optimisation des seuils critiques est rapportée dans l'article de conférence intitulé "Optimizing the Transient Behavior of Hedging Control Policies in Manufacturing Systems" mis à l'annexe III de ce chapitre.

## 4.6 Conclusion

Nous avons considéré le problème d'optimisation du contrôle de flux sur un horizon fini, pour une système multi-mode et produisant un seul type de pièces. La classe des lois de production est caractérisée par des points critiques invariants à l'intérieur de l'horizon d'optimisation. Une équation de renouvellement pour la fonctionnelle coût sur horizon fini a été développée et utilisée pour générer les coefficients d'une expansion en série infini de la transformée de Laplace du coût vu comme fonction de la longueur de l'horizon  $T$ .

Le calcul des coefficients dans la série infinie est basé sur une résolution d'un système d'équations différentielles récursives. Les coefficients dépendent du choix particulier des seuils critiques d'inventaires et l'optimisation procède par la suite numériquement.

L'application des approximants de Padé donne d'excellents résultats numériques et nous a permis d'estimer correctement le coût même pour des longueurs d'horizons de temps faibles (voir annexe II). La validation des approximations numériques a été possible par la comparaison des résultats numériques directe du système d'équations aux dérivées partielles donné au théorème 3.1 basé sur la méthode de Lax-Wendroff [30] pour des points critiques fixés.

De plus, en utilisant le contrôleur découplé sous-optimal de Caramanis et Sharifnia [9], la technique d'analyse transitoire développées ici peut être appliquées pour les systèmes multi-mode produisant plusieurs types de pièces.

L'estimation du temps de convergence vers le régime stationnaire a été possible par l'analyse des singularités de la transformée de Laplace de la fonctionnelle coût. Le résultat nous donne un critère d'estimation de la longueur minimale d'horizon requise pour garantir un pourcentage d'erreur maximal en fonction du pourcentage d'erreur par rapport au coût en régime stationnaire.

## ANNEXE I

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.3

Pour procéder à la démonstration du théorème 4.3, nous avons besoin du lemme suivant: Soit  $\Psi = \begin{bmatrix} -\lambda_{j1} & -\lambda_{j2} & \cdots & 0_j & \cdots & \lambda_{jn} \end{bmatrix}^t$ , où  $0_i = 0$  signifie que la  $i^{\text{ème}}$  entrée du vecteur est nulle.

**Lemme 4.3** Soit  $A = (sI - \Lambda^t)$ , et  $z_j$  le point de régénération.. Soit  $\phi_i(x, s) = \exp(-V_i^{-1} A x)$  pour  $x \in R_i$ . Soit  $e_i = [0, \dots, 1_i, \dots, 0]^t$ , avec  $1_i = 1$  à la  $i^{\text{ème}}$  colonne La condition frontière à  $z_m^-$  peut être écrite comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{F}(z_m^-, s) = V_m^{-1} \left\{ \Phi_1^{m-1} A e_1 \frac{v_1^1}{s - \lambda_{11}} F_1(z_1^-, s) \right. \\ + \Phi_2^{m-1} A e_2 P(z_2, s) \dots + \Phi_{j-1}^{m-1} A e_{j-1} P(z_{j-1}, s) \\ \left. - \Phi_j^{m-1} \Psi P(z_j, s) + \Phi_j^{m-1} e_j G_{jj}(s) \right. \\ \left. + \dots - A e_m P(z_m, s) \right\} \end{aligned} \quad (A.1)$$

où  $\Phi_k^{l-1} = \prod_{i=k}^{l-1} V_i \phi_i(\Delta_{i+1}, s) V_i^{-1}$ ,  $P(z_j, s) = \frac{1}{s - \lambda_{jj}}$  et  $\Delta_{i+1} = z_{i+1}^+ - z_i^-$ .  $k$  représente le  $k^{\text{ème}}$  points critiques et  $l$  représente le point où nous sommes entrain de calculer la condition frontière.

**Preuve:** Rappelons que les points critiques  $z_1 > z_2 > \dots > z_m$ , où  $m$  est le nombre d'états faisable et  $n$  le nombre d'états du système. En prenant la transformée de Laplace du système d'équations au dérivées partielles donné par le lemme 4.1 et en résolvant le système d'équations différentielles par rapport à  $x$  nous pou-

vons propager les conditions frontières à partir de  $z_1^-$ . Ceci donne:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(z_2^+, s) &= \phi((z_2 - z_1), s) \bar{F}(z_1^-, s) \\
 \bar{F}(z_2^-, s) &= V_2^{-1} \left\{ V_1 \phi((z_2 - z_1), s) \bar{F}(z_1^-, s) + \begin{bmatrix} -\lambda_{21} \\ (s - \lambda_{22}) \\ -\lambda_{23} \\ \vdots \\ -\lambda_{2j} \\ \vdots \\ -\lambda_{jn} \end{bmatrix} P(z_2, s) \right\} \\
 &= V_2^{-1} \left\{ V_1 \phi((z_2 - z_1), s) \bar{F}(z_1^-, s) + A e_2 P(z_2, s) \right\} \\
 \bar{F}(z_1^-, s) &= \left[ 1, -\frac{v_1^1 \lambda_{12}}{v_2^1 (s - \lambda_{11})} \dots - \frac{v_1^1 \lambda_{1n}}{v_n^1 (s - \lambda_{11})} \right]^t F_1(z_1^-, s) \\
 &= V_1^{-1} A e_1 \frac{v_1^1 F_1(z_1^-, s)}{(s - \lambda_{11})},
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(z_2^-, s) &= V_2^{-1} \left\{ V_1 \phi((z_2 - z_1), s) V_1^{-1} A e_1 \frac{v_1^1 F_1(z_1^-, s)}{(s - \lambda_{11})} + A e_2 P(z_2, s) \right\} \\
 \bar{F}(z_2^-, s) &= V_2^{-1} \Phi_1^1 A e_1 \frac{v_1^1 F_1(z_1^-, s)}{(s - \lambda_{11})} + A e_2 P(z_2, s).
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Nous continuons à propager cette condition frontière jusqu'à  $z_j$ , où nous avons instauré la condition d'absorption donnée par (3.5b'). Cette condition modifie la relation à la frontière  $z_j^-$  de la façon suivante:

$$P(z_j, s) = \frac{1}{s - \lambda_{jj}},$$

avec

$$v_j^{j+1} F_j(z_j^-, s) - v_j^{j-1} F_j(z_j^+, s) = G_{jj}(s),$$

la transformée de Laplace de la condition (3.5a) donne

$$\begin{aligned}
 v_i^{i+1} F_i(z_j^-, s) - v_i^{i-1} F_i(z_j^+, s) &= \lambda_{ji} P(z_j, s), \\
 i &= 1, \dots, n, \quad i \neq j,
 \end{aligned}$$

puis repropagé  $\bar{F}(z_j^-, s)$  jusqu'au point critique  $k$ . Supposons que la condition frontière au point d'ordre  $j < k < m$ , satisfait (A.1). Ce qui signifie que:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(z_k^-, s) &= V_k^{-1} \left\{ \Phi_1^{k-1} A e_1 \frac{v_1^1}{s - \lambda_{11}} F_1(z_1^-, s) \right. \\
 &\quad + \Phi_2^{k-1} A e_2 P(z_2, s) \dots + \Phi_{j-1}^{k-1} A e_{j-1} P(z_{j-1}, s) \\
 &\quad \left. + \Phi_j^{k-1} \Psi P(z_j, s) + \Phi_j^{k-1} e_j G_{jj}(s) + \dots + A e_k P(z_k, s) \right\},
 \end{aligned}$$



or

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(z_{k+1}^+, s) &= \phi((z_{k+1} - z_k), s) \bar{F}(z_k^-, s) \\
 \bar{F}(z_{k+1}^-, s) &= V_{k+1}^{-1} V_k \bar{F}(z_{k+1}^+, s) + V_{k+1}^{-1} A e_{k+1} \\
 &= V_{k+1}^{-1} V_k \phi((z_{k+1} - z_k), s) \bar{F}(z_k^-, s) + V_{k+1}^{-1} A e_{k+1}, \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $\bar{F}(z_k^-, s)$  dans (A.4) nous démontrons par récurrence que le résultats est vrai pour n'importe quel indice  $k$  y compris pour  $k = m$ . ■

**Preuve du théorème 4.3** La condition de stabilité (3.4c) s'écrit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{F}(x, s) = 0 \quad \text{pour } x \in R_m.$$

Cette condition est équivalente à choisir la condition initiale  $z_m^-$  orthogonale aux vecteurs associé aux valeurs propres à partie réelle négative de  $A$ . Ce qui revient à dire que la condition initiale est une combinaison linéaire des vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle strictement positive. Dans [10], le critère d'ergodicité implique que le système possède  $n - m$  valeurs propres à partie réelle strictement positive. Soient les  $\gamma_{mi}$  pour  $i = 1, 2, \dots, n - m$  les valeurs propres de  $V_m^{-1} A$  à partie réelle strictement positive et  $\omega_{mi}$  les vecteurs propres correspondants. Soient les  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - m$  une série de coefficients réels. La condition de stabilité peut être écrite comme suit:

$$\bar{F}(z_m^-, s) = \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \omega_{mi}. \quad (A.5)$$

En remplaçant (A.5) dans (A.1), la condition frontière à  $z_m$  est alors un ensemble de  $n$  équations, impliquant  $n$  paramètres inconnus donnés par:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i & \quad i = 1, 2 \dots n - m, \\
 P(z_i, s) & \quad i = 1, 3, \dots m; \quad i \neq j, \\
 G_{jj}(s). &
 \end{aligned}$$

Pour l'unicité de la solution le déterminant suivant doit être différent de zéro.

$$\begin{vmatrix}
 \omega_{m1} & \omega_{m2} & \cdots & \omega_{m(n-m)} & -V_m^{-1} \Phi_1^{m-1} A e_1 \frac{v_1^1}{s - \lambda_{11}} \\
 -V_m^{-1} \Phi_2^{m-1} A e_2 & \cdots & -V_m^{-1} \Phi_j^{m-1} A e_j \cdots & -V_m^{-1} A e_m
 \end{vmatrix} \neq 0.$$

De plus la fonction de densité de probabilité  $G_{jj}(s)$  est donnée par:

$$G_{jj}(s) = \frac{\begin{vmatrix} \omega_{m1} & \dots & \omega_{m(n-m)} & \frac{-V_m^{-1}\Phi_1^{m-1} A e_1 v_1^1}{s-\lambda_{11}} & \dots \\ -V_m^{-1}\Phi_2^{m-1} A e_2 & \dots & -\frac{V_m^{-1}\Phi_j^{m-1}}{s-\lambda_{jj}} \Psi & \dots & -V_m^{-1} A e_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_{m1} & \omega_{m2} & \dots & \omega_{m(n-m)} & \frac{-V_m^{-1}\Phi_1^{n-m} A e_1 v_1^1}{s-\lambda_{11}} & \dots \\ -V_m^{-1}\Phi_2^{n-m} A e_2 & \dots & -V_m^{-1}\Phi_j^{n-m} e_j & \dots & -V_m^{-1} A e_m \end{vmatrix}}.$$

Ceci nous permet d'écrire quand  $G_{jj}(s) = 1$

$$\begin{vmatrix} \omega_{m1} & \omega_{m2} & \dots & \omega_{m(n-m)} & \frac{-V_m^{-1}\Phi_1^{n-m} A e_1 v_1^1}{s-\lambda_{11}} & \dots \\ -V_m^{-1}\Phi_2^{n-m} A e_2 & \dots & \frac{-V_m^{-1}\Phi_j^{n-m} A e_j}{s-\lambda_{jj}} & \dots & V_m^{-1} A e_m \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne:

$$\begin{vmatrix} V_m^{-1}\omega_{m1} & V_m^{-1}\omega_{m2} & \dots & V_m^{-1}\omega_{m(n-m)} & -\Phi_1^{n-m} A e_1 \frac{v_1^1}{s-\lambda_{11}} & \dots \\ -\Phi_2^{n-m} A e_2 & \dots & -\Phi_j^{n-m} A e_j \frac{1}{s-\lambda_{jj}} & \dots & -A e_m \end{vmatrix} = 0, \quad (A.6)$$

sachant que  $\frac{d\phi_i(x,s)}{dx} = V_i^{-1} A \phi_i(x,s) = \phi_i(x,s) V_i^{-1} A$  and  $\Phi_i^k A = \prod_{i=l}^k V_i \phi_i(x,s) V_i^{-1} A = A \prod_{i=l}^k \phi_i(x,s)$ , (A.6) peut être réécrite comme suit:

$$\begin{vmatrix} A \omega_{m1} \frac{1}{\gamma_{m1}} & A \omega_{m2} \frac{1}{\gamma_{m2}} & \dots & A \omega_{m(n-m)} \frac{1}{\gamma_{m(n-m)}} & \frac{-A \prod_1^{m-1} \phi_i(x,s) e_1 v_1^1}{s-\lambda_{11}} & \dots \\ \dots & -A \prod_{i=2}^{m-1} \phi_i(x,s) e_2 & \dots & \frac{-A \prod_j^{n-m} \phi_i(x,s) e_j}{s-\lambda_{jj}} & \dots & -A e_m \end{vmatrix} = 0,$$

donnant

$$|A| \left\{ \begin{vmatrix} \omega_{m1} & \omega_{m2} \dots & \omega_{m(n-m)} & \prod_1^{m-1} \phi_i(x,s) e_1 & \dots \\ \prod_{i=2}^{m-1} \phi_i(x,s) e_2 & \dots & \prod_j^{n-m} \phi_i(x,s) e_j & \dots & e_m \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

■

## ANNEXE II

## “Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing”

by

Sami El-Férik<sup>1</sup> and Roland P. Malhamé<sup>2</sup><sup>2</sup> GERAD, Montreal (Quebec)<sup>1,2</sup> Electrical and Computer Eng. Dept.

Ecole polytechnique

C.P. 6079 succursale Centre ville

Montreal, (Quebec), Canada, H3C-3A7

<sup>1</sup> e-mail:elferik@auto.polymtl.ca<sup>2</sup> e-mail:malhame@auto.polymtl.ca

### Abstract

Part production is considered over a finite horizon in a single part multiple failure mode manufacturing system. When the rate of demand for parts is constant, for Markovian machine-mode dynamics and for convex running cost functions associated with part inventories or backlogs, it is known that optimal part production policies are of the so-called hedging type. For the infinite horizon case, such policies are characterized by a set of constant critical machine-mode dependent inventory levels that must be aimed at and maintained whenever possible. For the finite horizon (transient) case, the critical levels still exist but they are now time-varying and in general very difficult to characterize. Thus, in an attempt to render the problem tractable, transient production optimization is sought within the (suboptimal) class of time-invariant hedging control policies. A renewal equation is developed for the cost functional over finite horizon under an arbitrary time-invariant hedging control policy. The kernel of that renewal equation is a first return time probability density function which satisfies an auxiliary system of Kolmogorov type of partial

differential equations (PDE). The renewal equation and the auxiliary PDE system are used to generate the terms in an infinite Laurent series expansion of the Laplace transform of the finite horizon cost functional viewed as a function of the length of that horizon  $T$ . The terms in the infinite series expansion are generated recursively and their calculation is based on the solution of a system of piecewise smooth coupled linear differential equations, the associated Jordan canonical form of which is explicitly constructed. In the two-state machine case, this shows immediately that the Bielecki-Kumar infinite horizon cost is approached via a term that decays to zero as  $\frac{1}{T}$  and that can be computed exactly. Furthermore, Padé approximants to the resulting infinite series expansion yield a *generic* (and quite accurate) approximate expression of the cost functional in terms of  $T$  and  $z$ , the arbitrary hedging level. In the multi-state case, Padé approximants yield excellent numerical approximations to the cost functional as a function of  $T$  for given choices of hedging levels. This is subsequently used as part of an optimization scheme whereby hedging levels which are optimal for a given finite horizon length are efficiently computed. The algorithms presented here can also be applied to the finite horizon optimization for multi-part failure-prone manufacturing systems provided that only the partwise decoupled hedging control policies of Caramanis and Sharifnia are considered.

### –Keywords–

Padé approximants – Finite horizon manufacturing flow control – Hedging control policies

# 1 Introduction

Organization of flow control can be viewed as an important phase in a hierarchically structured scheme for the control of manufacturing systems [21]. Starting with the work of Olsder and Suri [5], a common paradigm for the analysis of this control problem has been a fluid model characterizing parts production, punctuated by random jumps either in the production capacity (due to machine failures or repairs), or in the demand for parts [26].

While the general mathematical theory for the optimal stochastic-control problems in such jump models was first formulated by Rishel [20], the specificity of the flexible manufacturing problem lies in the boundedness of the controls (parts production capacity sets), as well as the occasionally non negligible set-up times in changing over from set-up for one part to that for another part.

The qualitative features of the optimal control problem of minimizing inventory and backlog costs in multi-part manufacturing systems were studied by Kimemia and Gershwin [7]. An important concept emerged from their study, that of hedging type part production control policies. Relevance of the notion of a hedging policy was subsequently reinforced by a mathematically complete study of failure prone single part manufacturing system by Akella and Kumar [16]. Here, hedging policies emerged as the optimal ones for an infinite horizon, discounted integral cost functional with convex running cost. Since then, a growing body of research has been developed around the properties of hedging policies particularly in Markovian single part, single or multiple failure mode machines (See Liberopoulos and Hu [6] for a comprehensive list of references), but also in multi-part manufacturing systems ([9], [10],[12]). For non Markovian machines see for example Glasserman [14] and Brémaud et al. [13].

For the infinite horizon single part production problem, hedging policies are characterized by a set of constant machine mode dependent inventory levels, that the production policy must aim at reaching at the fastest rate possible, and main-

taining as long the associated machine mode prevails. Most of the existing hedging control literature has been focused on the infinite horizon problem, essentially for reasons of mathematical tractability. However, in the manufacturing systems community, it is widely recognized that many of the flow control problems can be classified as finite horizon because production requirements can change before the system has time to settle long enough into a statistical steady-state.

Using a Markov renewal viewpoint of hedging control policies, Malhamé and Boukas [19] made preliminary attempts at assessing the speed of convergence of such policies to a statistical steady-state. This could give preliminary criteria for separating finite horizon problems, from what could be considered as infinite-horizon problems. Also, forward Kolmogorov equations for the transient evolution of the system under hedging policies were presented.

Zhang and Yin [15] sought independently to solve the dynamic programming equations which arise in developing verification theorems for characterizing optimal flow control policies over finite-time horizon. In particular they looked for so-called turnpike sets (switching curves) where value functions are minimized (hedging points in the single part infinite horizon problem). In the finite horizon case, the critical inventory levels become time-varying and thus can be qualified as critical curves. Zhang and Yin [15] are able to solve completely the transient optimal control problem, single part two-state machine, with failure as an absorbing state, under constant demand for parts. A slight variation of the problem is also solved when capacity is constant and demand is a two-state Markov chain with zero as its absorbing state.

In the following paper, we seek instead optimal finite-horizon flow control policies within the (suboptimal) class of time-invariant hedging control policies (TIHC). Among the reasons for focusing on TIHC policies are relative tractability, ease of implementation, and asymptotic optimality as the length of the control horizon increases. The class of manufacturing systems considered is single part, multi-

ple failure modes. The paper is organized as follows. In section 2, we develop the mathematical model of the manufacturing system, state the optimal control problem, and give a preliminary characterization of the class of control policies of interest (TIHC policies). In section 3, a renewal equation is developed for the cost functional over finite-time horizon under arbitrary TIHC policies. The kernel of that renewal equation is a first return probability density function, and a partial differential equation (PDE) characterization of that density function is given. In section 4, theorems are developed to compute an infinite series expansion of the Laplace transform of the cost functional based on the renewal equation. The terms in the series are obtained as the solutions of recursive systems of coupled linear differential equations with boundary conditions. In section 5, the theory of Stieltjes' series is used to first develop Padé approximants of the Laplace transform of the cost functional, and eventually compute asymptotic approximations of the cost functional itself as the length of the horizon increases. In section 6, "partially analytical" expressions of the terms in the infinite series for the two modes machine case are given. Also, test results comparing the Padé approximants results with unwieldy Lax-Wendroff solutions of the PDE system in section 3 are given for the two modes and the three modes machine cases respectively. Suboptimal control synthesis is illustrated. Section 7 contains concluding remarks.

## 2 Suboptimal finite horizon production control

We consider a single-part-multiple-state manufacturing system. The system is characterized by a hybrid state  $[x(t), \xi(t)]^t$ . The discrete variable  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  is a continuous irreducible Markov chain with known intensity matrix  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ , ( $\lambda_{ii} = -\sum_j \lambda_{ij}$ ), and taking its value on a finite state space  $E$ . The continuous variable  $x(t)$  represents the production surplus of the product at time  $t$ . The system must satisfy a certain given constant demand per unit time  $d$ . For each  $\alpha \in E$ ,

$x(t)$  evolves according to the following differential equation

$$\dot{x}(t) = u_\alpha - d, \quad (1)$$

where  $u_\alpha$  is the production rate under the failure rate mode  $\alpha$ . The production rate takes its value on a convex set  $\Omega_\alpha$  assumed here as the closed interval  $[0 \bar{u}_\alpha]$ .  $\bar{u}_\alpha$  represents the maximum production rate allowed by the capacity constraints of the manufacturing system when it is in mode  $\alpha$ . Using the modeling framework of Sharifnia [23], or Caramanis and Sharifnia [10], the state space  $E$  is composed of  $n$  states representing the different failure modes of the system. Among these modes,  $m$  are said to be feasible ( $\bar{u}_\alpha > d$ ), and indexed by  $\alpha = 1, \dots, m$ ; otherwise the states are called infeasible and are indexed by  $\alpha = m + 1, \dots, n$ . A cost  $\ell(x(t))$  is incurred for either inventories or backlogs represented by  $x(t) > 0$  or  $x(t) < 0$  respectively.  $\ell(x(t))$  is assumed to be convex.

Our objective is to identify an admissible feedback (see [16]) production policy which minimizes the following cost functional:

$$J(x_0, \alpha_0) = E \left[ \int_0^T \ell(x(t)) dt |_{x_0, \alpha_0} \right], \quad (2)$$

for  $T$  a finite time horizon, given state equation (1), the machine mode dynamics, and where  $E[. | x_0, \alpha_0]$  is the expectation operator conditional on  $[x(0), \xi(0)]^t = [x_0, \alpha_0]^t$ .

For the infinite horizon version of this problem where the long-term average cost per unit time is to be minimized, i.e.,:

$$J^* = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[ \int_0^T \ell(x(t)) dt |_{x_0, \alpha_0} \right], \quad (3)$$

it is well known (see [22], ch.3 for a thorough analysis), that the optimal control policy is of the so-called hedging type. Thus, it is characterized by a set of constant critical machine mode-dependent inventory levels that the control effort must aim at attaining at the fastest rate and maintaining whenever possible. In the finite horizon case (2) (see Zhang and Yin [15]), the optimal control policy is still of the hedging



type, except that the critical levels are now time varying and the trajectories they follow can be termed critical curves. Except for the case of a two-state machine with an absorbing failure state [15], no known analytical expressions are available for the critical curves. Given the great difficulty of obtaining such expressions, as well as the nature of the resulting production control laws which may not be very practical to implement, we seek control laws for the finite horizon problem which would be optimal within the (suboptimal) class of time-invariant hedging control policies, i.e., where the critical levels are constant. Justification for the choice of such a class of control policies is threefold:

- The class will asymptotically include the true optimal control as  $T \rightarrow \infty$ .
- An optimal constant critical level can be viewed as coinciding with the “average” over the control horizon  $T$  of a time-varying optimal critical level.
- The implementation of the control law is simple.

As in Sharifnia [23], the time invariant hedging control policies are characterized by a set of arbitrary finite hedging levels  $z_\alpha$  associated with the feasible states  $\alpha = 1, \dots, m$ . Consequently,

$$u_\alpha^*(x) = \begin{cases} \bar{u}_\alpha & x < z_\alpha \\ d & x = z_\alpha \\ 0 & x > z_\alpha \end{cases} \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (4)$$

In infeasible modes, it is assumed that one always produces at the maximum rate. This is tantamount to assuming that the lowest hedging level associated with the infeasible modes is higher than or equal to the highest level associated with the feasible modes (see [22] ch.3 and [6] Section III for interesting partial results concerning this point).

Furthermore, the surplus production space is divided into a set of open regions  $R_\alpha = \{x \in R | z_{\alpha+1} < x < z_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, m-1$ , and  $R_m = \{x \in R | x < z_m\}$ ,

$R_0 = \{x \in R | z_1 < x\}$ . Here, it is assumed that a relabeling of machines states has been performed whereby  $\{z_\alpha\}$  are ordered as  $z_m < z_{m-1} < \dots < z_1$ . Between jumps of the discrete state  $\xi(t)$ ,  $u_\alpha^*(x)$  is constant and thus  $x(t)$  evolves, in a given region  $R_\alpha$ , according to a deterministic differential equation with a constant velocity  $u_\beta^*(x) - d$  denoted by  $v_\beta^\alpha$  where  $\beta$  is the current mode. For simplicity and although this is not indispensable, we assume throughout that for all states  $\beta \in E$  and  $\alpha = 1, \dots, m$ ,  $v_\beta^\alpha \neq 0$ . Removal of this assumption would indeed greatly complicate the formulation of Lemma 2 (moments would propagate according to linear *singular* systems) and Lemma 3 and 4, section 4 below, whereby one would have to deal with Jordan forms for singular systems. Also, probability masses would appear in more than one mode at hedging points. See Fig.1 for a geometric representation of the dynamics.

Hedging control policies have been the subject of a growing and interesting literature (see [6] for references). However, except for Malhamé and Boukas [19], Zhang and Yin [15], there is a paucity of analytical results concerning their transient behavior. The following result is reported in [19]:

**Theorem 1** *The hybrid density vector  $\vec{f}(x, t)$  will satisfy in region  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , the associated forward Kolmogorov PDE's given by:*

$$\frac{\partial \vec{f}(x, t)}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \vec{f}(x, t)}{\partial x} + \Lambda^t \vec{f}(x, t), \forall x \in R_i \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, m,$$

where  $V_i = \text{diag}[v_\alpha^i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . and  $\forall \lambda \in R_i$  and for infinitesimal  $d\lambda$ ,  $f_i(x, t)$  is such that:

$$f_i(\lambda, t) d\lambda = \text{Pr}[(\lambda < x < \lambda + d\lambda) \cap (\xi(t) = i)]$$

$\vec{f}(x, t) = [f_1(x, t) \dots f_n(x, t)]^t$ . The boundary conditions associated with (5) are as follows: at hedging point  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ :

$$\lambda_{ij} P_{z_i}(t) + v_j^i f_j(z_i^-, t) - v_j^{i-1} f_j(z_i^+, t) = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n; \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} j &\neq i, \\ \frac{dP_{z_i}(t)}{dt} &= \lambda_{ii} P_{z_i}(t) + v_i^i f_i(z_i^-, t) - v_i^{i-1} f_i(z_i^+, t) \quad (6b) \\ \text{for } j &= i, \end{aligned}$$

where  $P_{z_i}(t)$  is the probability mass at  $z_i$  and time  $t$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . In addition  $\tilde{f}(x, t)$  is zero at  $\pm\infty$ . More precisely:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= 0 \quad \forall x > z_1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{f}(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (6c)$$

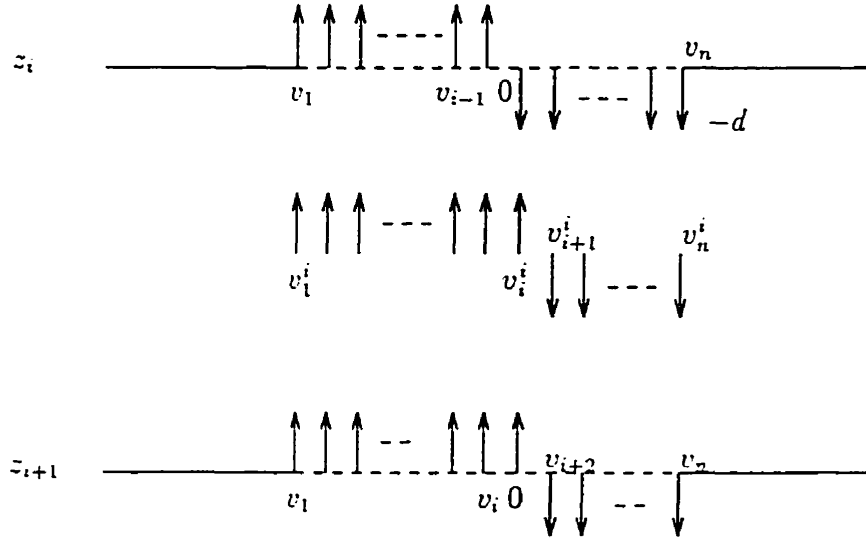


Figure 1: vector fields associated with hedging points control policies in region  $R_i$  for all possible modes  $\beta = 1, \dots, n$  respectively from left to right

The set (5)-(6) of PDE's with boundary conditions has a transparent physical meaning which it is important to discuss because it will be very instrumental for a number of developments in the paper. (5)-(6) represent a probability flow balance equation. If one interprets  $v_j^i(t) f_j(x, t)$  as the probability current at (surplus)

position  $x$ , time  $t$  in region  $R_i$  and machine mode  $j$  (probability per unit time), then (6a) is a mathematical expression of the fact that probability currents will in general be discontinuous across a hedging level, say  $z_i$ , if they are associated with a machine mode  $j \neq i$ . The size of the discontinuity is given by the average rate  $\lambda_{ij} P_{z_i}(t)$  at which a machine in mode  $i$  when the inventory is  $z_i$  will switch to mode  $j$  (and thus leave the hedging point). (6b) is the counterpart of (6a) when dealing with probability currents associated with mode  $i$  across hedging point  $z_i$ . Indeed here, the probability currents point towards  $z_i$  and are in fact *the only positive contribution to the probability mass at  $z_i$*  (a machine will spend a non zero time at  $z_i$  only if it was in mode  $i$  when it hit  $z_i$ ). Thus (6b) expresses the fact that the rate of change of the probability mass at  $z_i$  is equal to positive currents from mode  $i$  densities around  $z_i$  minus the rate  $(-\lambda_{ii} P_{z_i}(t))$  at which a machine already in mode  $i$  at  $z_i$  leaves that mode and thereby contributes through (6a) to feeding the probability currents associated with other modes around  $z_i$ . Finally note that the condition (6c) at  $(-\infty)$  is important to ensure that the total probability mass is bounded at all times.

In the following section, we shall develop a renewal equation satisfied by the finite horizon cost functional in (2). Starting with Akella-Kumar [16], and particularly with Malhamé-Boukas [18], renewal viewpoints of hedging control policies have proved to be extremely useful particularly when it comes to making statements about the ergodicity and transient behavior of such policies. The Markovian structure of the controlled  $[x(t), \xi(t)]^t$  process is such that any fixed particular point say  $[x_0, \xi_0]^t$  can, as long as it is reachable, constitute a regeneration point for the process. Regeneration points of particular interest are the ones associated with so-called hedging point events, i.e., instants where a hedging inventory level say  $i$  is just reached while the machine is in mode  $i$ . Hereon, we shall denote by type  $i$  such regeneration events with  $i = 1, \dots, m$ . Also, for the rest of the paper we assume that matrices  $V_i^{-1} \Lambda^t$ ,  $i = 1, \dots, m$  have *distinct eigenvalues*. While this

assumption is not indispensable, it makes a simple recursive computation of the generalized eigenvectors in equation (41), section 4 below, possible. Notice that the assumption of distinct eigenvalues will in most cases be satisfied. Indeed, consider the very demanding case where the manufacturing system of interest is made up of say  $k$  identical (unreliable) independent parallel machines; while the transpose of the system intensity matrix  $\Lambda$  will have multiple eigenvalues,  $V_i^{-1} \Lambda^t$  will not because the velocity matrix  $V_i$  does not sufficiently preserve the symmetry of the problem.

### 3 Renewal equation for the finite horizon cost

The following Lemma is concerned with a modification of PDE system (5)-(6) to compute the probability density function (p.d.f.) of times between successive type  $i$  regeneration events. Let  $g_{ii}(t)$  denote that p.d.f. .

In Malhamé [17], it was shown how in Markov processes with continuous trajectories, one could use the forward Kolmogorov equations to compute first passage-time densities. The gist of the argument is as follows: a continuous Markov process cannot attain a given boundary unless it is in the immediate vicinity of that boundary the instant before. Until it hits that boundary (whereby it is stopped), the process cannot “know” about the existence of the boundary and therefore it satisfies (locally) the usual forward Kolmogorov equations. Upon hitting the boundary, the process must be “killed” (because it is not allowed to propagate again). Mathematically, this is implemented by introducing at the boundary of interest a new boundary condition which insures that return probability currents from the boundary, if any, are set to zero. The boundary becomes absorbing. This is the point of drastic departure from the usual forward Kolmogorov equation which can be characterized as a *conservation equation* (total probability mass in the system is constant). In the case of a first passage-time (absorbing) boundary, the system starts “leaking” and if the original Markov process is such that it hits the barrier

with probability one, then the total probability remaining in the system as  $t \rightarrow \infty$  is zero. Now recalling that first passages to the boundary of interest can only be achieved from the immediate vicinity of that boundary, the probability that escape occurs between  $t$  and  $t + dt$ , say  $g(t) dt$  for  $t > 0$ ,  $dt$  infinitesimal is given by the amount of probability that leaks across the absorbing boundary around time  $t$ . This is nothing but the net probability current at the boundary multiplied by  $dt$ . Given that the return probability current is extinguished at the absorbing boundary we conclude that  $g(t) \equiv$  *outward pointing probability current at the boundary*. This is the essence of *the probability current method* of computing first passage-time densities.

How can we apply this kind of computational principle for determining p.d.f.  $g_{ii}(t)$  of first return to  $z_i$  in mode  $i$ ?

The principle dictates a modification of the boundary conditions at  $z_i$  in such a way that any trajectory that attains  $z_i$  in machine state mode  $i$  is "killed." In other words, an absorbing boundary condition must set up at  $z_i$  but it must be active only if the discrete part of the hybrid state is  $i$ . This is equivalent to stating that the boundary condition should only involve  $f_i(z_i^+, t)$  and  $f_i(z_i^-, t)$ . Now reconsidering (6b) and its physical interpretation in section 2, the quantity  $v_i^+ f_i(z_i^-, t) - v_i^{+1} f_i(z_i^+, t)$  is precisely the total return probability current at boundary  $z_i$  in mode  $i$ , if all probability mass at time zero is concentrated at  $z_i$  in mode  $i$ . The required absorption will be achieved if that return probability current is extinguished. Thus for a particular  $i$  of interest, (6b) should read:

$$\frac{dP_{z_i}(t)}{dt} = \lambda_{ii} P_{z_i}(t) . \quad (6b')$$

The first return p.d.f.  $g_{ii}(t)$  at time  $t$  would then simply be (under the modified boundary condition) the rate at which probability leaks at the absorbing boundary, i.e., it is equal to the total return probability current  $v_i^+ f_i(z_i^-, t) - v_i^{+1} f_i(z_i^+, t)$  which is being extinguished. This leads us to the following Lemma.

**Lemma 1** *The p.d.f. of time between regenerations of type  $i^*$ ,  $g_{i^*i^*}(t)$  for*

$i^* = 1, \dots, m$ , can be obtained from the PDE system with boundary conditions (5), (6a) and (6b), except that for  $i = i^*$ , boundary condition (6b) should read:

$$\frac{dP_{z_i^*}(t)}{dt} = \lambda_{i^*, i^*} P_{z_i^*}(t). \quad (7)$$

The initial conditions should be:

$$\begin{aligned} P_{z_i^*}(0) &= 1 \\ f_i(x, 0) &= 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad \forall x \in R_j; \quad j = 1, \dots, m, \\ P_{z_i}(0) &= 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, m, \quad i \neq i^*, \end{aligned} \quad (8)$$

$g_{i^*, i^*}(t)$  is then given by:

$$g_{i^*, i^*}(t) = v_{i^*}^{i^*} f_{i^*}(z_{i^*}^-, t) - v_{i^*}^{i^* - 1} f_{i^*}(z_{i^*}^+, t). \quad (9)$$

In the next theorem, we use the regenerative structure of the controlled surplus process to develop a renewal equation for the finite horizon cost, assuming at time 0,  $x(0) = z_i$  and  $\alpha(0) = i$ . Define

$$C_i(T) = \int_0^T E \left[ \ell(x(\tau)) |_{\alpha(0)=i, x(0)=z_i} \right] d\tau. \quad (10)$$

While, in general the initial inventory will be at a value  $x(0) = x_0 \neq z_i$ , if the time horizon is sufficiently long, the initial transient from  $x_0$  to  $z_i$  will not have a lasting effect. Thus in order to limit the number of arbitrary parameters to be dealt with, we deliberately set  $x(0)$  to  $z_i$ . Note that the general case can easily be handled by appropriately modifying the initial p.d.f of  $x(t)$  in Theorem 2. We shall refer to  $C_i(T)$  as the type  $i$  cost functional for length  $T$ . Let  $\tau$  be the first type  $i$  regeneration epoch after 0. Throughout the rest of the paper, we assume that the demand is feasible in the long run, i.e., if  $\pi = [\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)]$  represents the ergodic steady-state distribution of the machine mode Markov chain,

$$\sum_{i=1}^n \pi(i) v_i^m > 0. \quad (11)$$

Such an assumption is known (see [11]) to guarantee the ergodicity of the finite state Markov renewal process embedded in the  $[x(t), \xi(t)]^t$  Markov process as defined by

Malhamé and Boukas [19]. This process is constructed by focusing on the successive instants at which the open regions  $R_1, R_2, \dots, R_m$  are first entered and recording thereupon the machine state, as well as the instants, of hedging point regeneration events. Thus hedging point events will all be positive recurrent and in particular  $Pr[\tau < \infty] = 1$ . Let us define

$$\tilde{x}(t) = x(t) I_{\{t < \tau\}}, \quad (12)$$

where  $I_{\{\cdot\}}$  is the set indicator function.  $\tilde{x}(t)$  is indistinguishable from  $x(t)$  until the first renewal epoch  $\tau$  upon which  $\tilde{x}(t) = 0$  (the process is stopped). Given the additive nature of the cost functional in (10), total cost from 0 to  $T$  can be divided up into costs from 0 up to  $\min(\tau, T)$ , and subsequently costs from  $\tau$  to  $T$  if  $\tau < T$ . More precisely:

$$C_i(T) = \int_0^T E \left[ \ell(\tilde{x}(t)) |_{\alpha=i, \tilde{x}(0)=z_i} \right] dt + \int_0^T C_i(T - \tau) g_{ii}(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Since we know from Lemma 1, how to determine  $g_{ii}(t)$  the p.d.f. of times of recurrence of type  $i$  events, it remains to express the first expectation in the right hand-side of (13) in order to make the equation useful. Now, recall that  $\tilde{x}(0) = x(0)$ , and in fact  $\tilde{x}(t)$  is indistinguishable from  $x(t)$  until the first regeneration time upon which the process is killed. This "killing" coincides in fact with  $x(t)$  hitting  $z_i$  in machine mode  $i$ , for the first time after leaving  $z_i$ . Thus  $z_i$  must act as an absorbing boundary in the sense of Lemma 1. As a result,  $\tilde{x}(t)$ , will have a statistical evolution characterized by the same forward Kolmogorov equations as  $x(t)$  except that boundary conditions must be modified the same way as in Lemma 1 (7).

Lemma 1 provides then a means of computing both  $g_{ii}(t)$  and the first expectation in the right-hand-side of (13), and we have the following theorem:

**Theorem 2** *The type  $i$  cost functional for length  $T$  associated with an arbitrary time invariant hedging control policy in system (1), and for  $i$  some fixed index in  $1, 2, \dots, m$ , satisfies the following renewal equation.*

$$C_i(T) = \int_0^T E \left[ \ell(\tilde{x}(\tau)) |_{\alpha=i, \tilde{x}(0)=z_i} \right] d\tau + \int_0^T C_i(T - \tau) g_{ii}(\tau) d\tau. \quad (14)$$



where the kernel  $g_{ii}(t)$  is calculated according to Lemma 1, and where the  $[\tilde{x}(t), \xi(t)]$  process statistically evolves according to the same forward Kolmogorov equations and boundary conditions as in Lemma 1, with initial conditions:

$$\begin{aligned} P_{z_i}(0) &= 1, \\ f_i(x, 0) &= 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad \forall x \in R_j; \quad j = 1, \dots, m, \\ P_{z_j}(0) &= 0 \quad \text{for } j = 1, \dots, m, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Theorem 2 is the fundamental result that we will need in the rest of the paper to characterize the dependence of the finite horizon cost on the length of the horizon  $T$ . In view of the convolution in the right-hand side of (14), Laplace transforms will prove to be a valuable tool in the rest of the analysis. While in the two-state machine problem (Bielecki-Kumar [24]), an exact Laplace transform expression of the type  $i$  cost functional for length  $T$  can be obtained (see Malhame-Boukas [18]), this is not possible in the multi-state problem. Instead, we can recursively generate an infinite Laurent series expansion of the Laplace transform. This the object of the next section.

## 4 Asymptotic Laurent series for the Laplace transform of $C_i(t)$

Define, when they exist,  $F_j(x, s)$ ,  $G_{ii}(s)$  and  $C_i(s)$  as the Laplace transforms of  $f_j(x, t)$ ,  $g_{ii}(t)$  and  $C_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , respectively. Laplace transformation of the cost renewal equation in Theorem 2 yields:

$$C_i(s) = \frac{\frac{1}{s} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) F_j(x, s) dx + \sum_{j=1}^m \ell(z_j) P_{z_j}(s)}{1 - G_{ii}(s)}. \quad (15)$$

In this section, we shall be concerned with developing an infinite series expansion of  $C_i(s)$  around  $s = 0$ . In order to justify looking for such an expansion, we first need to establish the analyticity of all Laplace transforms in (15) at  $s =$

0. Under the ergodicity condition in (11), it is possible to establish the required analyticity proprieties. However, the proof is long, somewhat technical, and it consists of an extension of the arguments in Malhamé [11], Section III. Therefore, in the interest of conciseness, we proceed by assuming as already proved the result that *under ergodicity criterion (11),  $F_j(x, s)$ ,  $j = 1, \dots, n \forall x \in \bigcup_{i=1}^m R_i$  and  $P_{z_i}(s)$ ,  $i = 1, \dots, m$  are analytic at  $s = 0$* . A sketch of the proof under the title “Sketch of the proof of Analyticity of Laplace Transforms at  $s = 0$ ” is reported in Appendix A. In view of (9),  $G_{ii}(s)$  will be analytic at  $s = 0$ . So let

$$G_{ii}(s) = 1 - \mu s + \frac{\mu_2}{2} s^2 + \dots + (-1)^k \frac{\mu_k}{k!} s^k + \dots$$

where  $\mu = E[\tau]$ , and  $\mu_k = E[\tau^k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . If we now define:

$$\vec{m}_k(x) = (-1)^k \left. \frac{\partial^k \vec{F}(x, s)}{\partial s^k} \right|_{s=0} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \forall x \in R_i, \quad (16)$$

$$\text{and } m_{i,k} = \left. \frac{\partial^k P_{z_i}(s)}{\partial s^k} \right|_{s=0} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

$\vec{m}_k(x)$  represents the vector moments of  $k^{th}$  order associated with the vector of p.d.f's  $\vec{f}(x, s)$  at  $z_{i+1} < x < z_i$ , whereas  $m_{i,k}$  represents the moment of  $k^{th}$  order at  $x = z_i$ . We obtain the following infinite Laurent series expansion of  $C_i(s)$  near  $s = 0$ :

$$C_i(s) = \frac{1}{s^2 \mu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \mathbf{1}^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \vec{m}_k(x) dx + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} m_{i,k} \ell(z_i) \right\} \frac{s^k}{k!} \frac{1}{\left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu} (-1)^k \frac{s^{k-1}}{k!} \right]}. \quad (18)$$

$$= \frac{1}{s^2 \mu} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_{i,k} s^k}{\left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu} (-1)^k \frac{s^{k-1}}{k!} \right]}, \quad (19)$$

where  $\mathbf{1}^t = [1 \dots 1] \in R^n$ , and

$$C_{i,k} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \mathbf{1}^t (-1)^k \vec{m}_k(x) dx + \sum_{i=1}^m m_{i,k} \ell(z_i) \right\} \frac{1}{k!}. \quad (20)$$

Evaluating the above expression evidently requires the ability to compute the different moments appearing in it. This is the object of the next lemma. This lemma

constitutes also a generalization of the result that was first developed in [11] on the computation of moments of sojourn times of the surplus process in the regions comprised between successive hedging points in the parts surplus space.

**Lemma 2** *Let  $\vec{m}_q(x)$  be the vector of moments of  $q^{th}$  order corresponding to the vector p.d.f.  $\tilde{f}(x, t)$ ,  $q \geq 0$ . Under ergodicity assumption (11), and for  $\tilde{f}(x, 0) = 0$   $\forall x \in R_i$ , the vectors  $\vec{m}_q(x)$  satisfy the following recursive system of linear ordinary differential equations (ODE):*

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{m}_q(x)}{dx} &= V_i^{-1} \Lambda^t \vec{m}_q(x) + q V_i^{-1} \vec{m}_{q-1}(x) \quad \forall x \in R_i \\ q &= 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (21)$$

with

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{m}_0(x)}{dx} &= V_i^{-1} \Lambda^t \vec{m}_0(x) \quad \forall x \in R_i \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (22)$$

Defining

$$\vec{\Gamma}_k(x)^t = [\vec{m}_0^t(x), \vec{m}_1^t(x), \vec{m}_2^t(x), \dots, \vec{m}_k^t(x)]; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

$\vec{\Gamma}_k(x)$  obeys the following ODE:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Gamma}_k(x)}{dx} &= A_{i,k} \vec{\Gamma}_k(x) \\ &= \begin{bmatrix} V_i^{-1} \Lambda^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ V_i^{-1} & V_i^{-1} \Lambda^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 * V_i^{-1} & V_i^{-1} \Lambda^t & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & k * V_i^{-1} & V_i^{-1} \Lambda^t \end{bmatrix} \vec{\Gamma}_k(x) . \end{aligned} \quad (24)$$

Thus:

$$\vec{\Gamma}_k(x) = \exp(A_{i,k} * (x - z_i)) \vec{\Gamma}_k(z_i^-) \quad \forall x \in R_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (25)$$

with,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{\Gamma}_k(x) = 0, \quad (24a)$$

$$\text{and } \vec{\Gamma}_k(x) = 0 \quad \forall x \in R_0$$

$$\text{for } k = 1, 2, \dots$$

**Proof:** : See Appendix A. ■

In view of the block triangular structure of  $A_{i,k}$  in (25), if  $\lambda$  is an eigenvalue of  $V_i^{-1} \Lambda^t$ , it is also an eigenvalue of  $A_{i,k}$  with multiplicity  $(k+1)$ . In what follows, we use the Jordan canonical form to derive analytical expressions for the matrix exponential in (25).

Let  $P_{i,k}$ ,  $Q_{i,k}$  be the matrices with columns respectively corresponding to the generalized left and right eigenvectors of matrix  $A_{i,k}$  associated with computations up to the  $k^{th}$  order moments in region  $R_i$ . (25) can be then put into the Jordan canonical form so that:

$$\frac{d\bar{\Gamma}_k(x)}{dx} = P_{i,k} \begin{bmatrix} J_{1,k}^i & & & \\ & J_{2,k}^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n,k}^i \end{bmatrix} Q_{i,k} \bar{\Gamma}_k(x). \quad (26)$$

where in (26)  $J_{j,k}^i$  stands for the Jordan blocks associated with the  $j^{th}$  eigenvalue  $\lambda_j$  of  $V_i^{-1} \Lambda^t$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ . The next two Lemmas are proved in Appendix A and provide a method for recursively computing the generalized eigenvectors of  $A_{i,k}$ . Recall that we have assumed that the eigenvalues of  $V_i^{-1} \Lambda^t$ ,  $i=1, \dots, m$  are all distinct.

**Lemma 3** Let  $L_{jk}^t = \lambda_j - A_{ik}$ , for given  $i, j, k$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $k \geq 0$ , and where  $\lambda_j$  is the  $j^{th}$  distinct eigenvalue of  $A_{ik}$ . Let  $w_{j0}, w_{j1}, \dots, w_{jk}$ , be the generalized grade  $\ell$  eigenvectors in matrices  $A_{i\ell}$  respectively for  $\ell=0, \dots, k$ , and associated with eigenvalue  $\lambda_j$ . Suppose there exists a sequence of scalars  $\alpha_\ell$ ,  $\ell=0, \dots, k-1$ , and vectors  $u_\ell$ ,  $\ell=1, \dots, k$ , in  $R^n$  such that

$$\left\{ \sum_{p=0}^{\ell-1} L_{j,0}^p [0_{n \times n(\ell-1)}, -\ell V_i^{-1}] L_{j,\ell-1}^{\ell-1-p} \right\} w_{j,\ell-1} + L_{j,0}^\ell u_\ell = \alpha_{\ell-1} w_{j,0} \quad (27)$$

for  $\ell=2, \dots, k \quad k \geq 2$ .

with

$$-V_i^{-1} w_{j,0} + L_{j,0} u_1 = \alpha_0 w_{j,0} \text{ for } k=1, \quad (28)$$

then the following must hold

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -v'_{ji}, \\ \alpha_{\ell-1} &= \ell! \alpha_0^\ell \quad \ell = 2, \dots, k \\ k &\geq 2,\end{aligned}$$

where  $V'_i = P_{i,0} V_i^{-1} Q_{i,0}$ ,  $P_{i,0}$  and  $Q_{i,0}$  are defined in (26) and  $v'_{ji}$  is the  $j^{\text{th}}$  diagonal element of matrix  $V'_i$ .

**Proof:** : See Appendix A. ■

**Lemma 4** Let  $w_{j,k-1}$  be a grade  $k$  generalized eigenvector of a matrix  $A_{i,k-1}$ ,  $k \geq 1$ , as defined in (24), with  $A_{i,0} = V_i^{-1} \Lambda^i$ , associated with the eigenvalue  $\lambda_j$  for some fixed index  $j = 1, \dots, n$ . Then a grade  $k+1$  generalized eigenvector of  $A_{i,k}$  associated with  $\lambda_j$  can be constructed as follows:

$$w_{j,k} = \begin{bmatrix} w_{j,k-1} \\ u_k \end{bmatrix},$$

where  $u_k$  must satisfy the following equation for some scalar  $\alpha_{k-1} \neq 0$

$$\left\{ \sum_{p=0}^{k-1} L_{j,0}^p [0_{n \times n(k-1)} \cdot -k V_i^{-1}] L_{j,k-1}^{k-1-p} \right\} w_{j,k-1} + L_{j,0}^k u_k = \alpha_{k-1} w_{j,0} \quad (29)$$

for  $k \geq 2$ ,

with

$$-V_i^{-1} w_{j,0} + L_{j,0} u_1 = \alpha_0 w_{j,0} \quad \text{for } k = 1, \quad (30)$$

Furthermore it is always possible to find  $u_k \neq 0$  satisfying (29) and  $u_1 \neq 0$  and  $\alpha_0 \neq 0$  satisfying (30).

**Proof.:** See Appendix A. ■

Now, let

$$\begin{aligned}
 v_k &= w_{j,k} \\
 v_{k-1} &= L_{j,k} w_{j,k} \\
 v_{k-2} &= L_{j,k}^2 w_{j,k} \\
 &\vdots \\
 v_1 &= L_{j,k-1}^k w_{j,k},
 \end{aligned}$$

$\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  represents a chain of generalized eigenvectors of length  $(k+1)$ .

Using Lemma 4, we note that

$$w_{j,k} = \begin{bmatrix} w_{j,k-1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{j,k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} w_{j,0} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Hence,  $v_i$  has the following entries:

$$v_{k-i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i w_{j,0} \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} \quad 0 \leq i \leq k. \quad (32)$$

Furthermore matrix  $P_{i,k}$  in (26) is composed of  $n$  blocks of  $(k+1)$  generalized eigenvectors each associated with an eigenvalue  $\lambda_j$ . Each block has the following form:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & w_{j,0} \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_0 w_{j,0} & \times \\ \vdots & & \alpha_1 w_{j,0} & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k-1} w_{j,0} & \dots & \times & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Now, from the proof of Lemma 3 in Appendix A, (27) can be written as:

$$\left\{ \sum_{p=0}^{k-1} [\Delta_j]^p Q_{i,0} [0, -k V_i^{-1}] L_{j,k-1}^{(k-1-p)} \right\} w_{j,k-1} + [\Delta_j]^k Q_{i,0} u_{k+1} = \alpha_{k-1} Q_{i,0} w_{j,0}.$$

where  $\Delta_j = \text{diag}[\lambda_j - \lambda_\ell]$ ,  $\ell = 1, \dots, n$ . Let  $u'_k = Q_{i,0} u_k$  with the  $j^{\text{th}}$  component of  $u'_k$  is equal to zero. Define:

$$\Delta_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_1} & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} & \vdots & & \\ \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots \\ & & & \vdots & \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{j+1}} & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \vdots & & \frac{1}{\lambda_j - \lambda_n} \end{bmatrix}.$$

We have:

$$u'_1 = [\Delta_j^{-1}] \{ \alpha_0 Q_{i,0} w_{j,0} + Q_{i,0} V_i^{-1} w_{j,0} \}, \quad (33)$$

for  $k = 1$  and

$$u'_k = [\Delta_j^{-1}]^k \left\{ \alpha_{k-1} Q_{i,0} w_{j,0} - \left\{ \sum_{p=0}^{k-1} [\Delta_j]^p Q_{i,0} [0, -k V_i^{-1}] L_{j,k-1}^{(k-1-p)} w_{j,k-1} \right\} \right\} \quad (34)$$

for  $k \geq 2$ .

Finally

$$u_k = P_{i,0} u'_k, \quad (35)$$

(31), (33), 34, (35) summarize the recursive computation of the generalized eigenvectors of matrices  $A_{ik}$ . In fact the  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 0, \dots, k-1$  are calculated from the Lemma 3 and subsequently used in (34) and (33) to obtain the generalized eigenvectors. Thus, the following Jordan canonical block form associated with the eigenvalue  $\lambda_j$  is obtained:

$$J_{j,k}^i = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & 1 & \dots \\ \vdots & & 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

With this in mind:

$$\bar{\Gamma}_k(x) = P_{i,k} \exp[J_{j,k}^i (x - z_i^-)] Q_{i,k} \bar{\Gamma}_k(z_i^-) \quad \forall x \in R_i, \quad ,$$

where  $\exp [J_{j,k}^i (x - z_i^-)]$  is a  $\{(k+1) \times (k+1)\}$  block diagonal matrix with Jordan blocks as follows [1]:

$$\begin{bmatrix} \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] & (x - z_i^-) \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] & \dots & \frac{(x - z_i^-)^k}{k!} \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] \\ 0 & \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] & \dots & \frac{(x - z_i^-)^{k-1}}{(k-1)!} \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(x - z_i^-)^{k-2}}{(k-2)!} \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp [\lambda_j (x - z_i^-)] \end{bmatrix}.$$

We have now all that is needed to characterize the asymptotic expression given by the Laurent series in equation (18). Under ergodicity assumption (11), the next theorem provides essentially an algorithm for computing the different terms in (19). The theorem is obtained by applying the type of calculations in Lemma 2 to all the quantities in the PDE system of Lemma 1. Thus every Laplace transform, be it  $\bar{F}(x, s)$  or  $P_{z_i}(s)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , is associated with a string of coefficients,  $\bar{m}_0(x)$ ,  $\bar{m}_1(x)$ ,  $\bar{m}_2(x)$ , ... and  $m_{i,0}$ ,  $m_{i,1}$ ,  $m_{i,2}$ , ...,  $i = 1, \dots, m$  respectively, corresponding to its infinite series expansion near  $s = 0$ . The former string of (vector) coefficients satisfies piecewise smooth linear differential equations with constant coefficients as in Lemma 2, while the latter satisfies sets of algebraic equations. The linear differential equations are such that (see (21), (24))  $\bar{m}_q(x)$  for some index  $q$  is determined in region  $R_i$  by  $\bar{m}_j(z_i^-)$ ,  $j = 1, \dots, q-1$  but is not affected by  $\bar{m}_j(x)$   $j > q$ , while the sets of algebraic equations involve  $m_{i,q-1}$ ,  $m_{i,q}$  and  $\bar{m}_q(z_i^-)$ ,  $\bar{m}_q(z_i^+)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , for  $q \geq 1$ . As a result, it is most efficient to first compute  $\bar{m}_0(x)$ ,  $m_{i,0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , then given  $m_{i,0}$ ,  $\bar{m}_0(z_i^-)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , compute  $\bar{m}_1(x)$ ,  $m_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, m$  and so forth, given  $m_{i,0}$ ,  $\bar{m}_0(z_i^-)$ ,  $m_{i,1}$ ,  $\bar{m}_1(z_i^-)$ ,  $m_{i,2}$ ,  $\bar{m}_2(z_i^-)$ , ...,  $m_{i,q}$ ,  $\bar{m}_q(z_i^-)$ , compute  $m_{i,q+1}$ ,  $\bar{m}_{q+1}(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $q \geq 1$ .

Furthermore, notice that assuming  $\bar{m}_0(z_i^-)$ , ...,  $\bar{m}_{q-1}(z_i^-)$ ,  $m_{i,q-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$  are known for a fixed index  $q$ , and given  $m_{1,q}$ , it is possible to compute (see (37) below) vector  $\bar{m}_q(z_1^-)$  as long as  $z_1$  is not the chosen regeneration hedging point. If it is, then  $m_{1,q}$  is known at that point (since  $P_{z_1}(t) = \exp(\lambda_{11} t)$ ) and given for example  $m_{1,0}(z_1^-)$ , vector  $\bar{m}_q(z_1^-)$  can be entirely determined. In both cases,  $\bar{m}_q(z_1^-)$  is



obtained via use of algebraic equations. We then use this knowledge and differential equation (24) with  $k = q$ ,  $i = 1$ , to compute  $\bar{m}_q(z_2^+)$ . Now, given  $m_{2,q}$  and arguing similarly, we see that vector  $\bar{m}_q(z_2^-)$  can be obtained via algebraic equations. Subsequently, a differential equation ((24) with  $k = q$ ,  $i = 2$ ) is used to compute  $\bar{m}_q(z_3^+)$  and so forth until one computes  $\bar{m}_q(z_m^-)$ . Note that at each hedging point  $z_i$ , we have assumed that either  $m_{i,q}$  or  $m_{i,q}(z_i^-)$  was known. Therefore  $\bar{m}_q(z_m^-)$  is a function of a total of  $m$  unknowns. This is the point where boundary condition (24a) comes to bear on the problem. Indeed, this boundary condition which is valid only under ergodicity assumption (11), requires that vector  $[\bar{m}_0^t(z_m^-), \bar{m}_1^t(z_m^-), \dots, \bar{m}_q^t(z_m^-)]^t$  be orthogonal to the left eigenspace associated with the eigenvalues with negative or zero real part of matrix  $A_{m,q}$  in (24). Now, matrix  $A_{m,q}$  has the same distinct eigenvalues as matrix  $V_m^{-1} \Lambda^t$  which under (11) must have exactly  $m$  eigenvalues with non positive real parts (see [11], Theorem 2). This happens as we show in the proof of the theorem, to provide the required  $m$  equations to complete the cycle of computations associated with determining  $\bar{m}_q(x)$  and  $m_{i,q}$   $i = 1, \dots, m$ . At that point everything is in place for starting computations for  $\bar{m}_{q+1}(x)$  and  $m_{i,q+1}$ .

While the actual calculations for forthcoming Section 6 were organized in an entirely recursive manner, in Theorem 3, we present a block calculation of the moments up to some fixed order  $k \geq 0$ .

**Theorem 3** *Let  $i$  be the regeneration hedging state (for some  $i = 1, 2, \dots, m$ ). Coefficients of the infinite series expansion up to some fixed index  $k$  in (18) are obtained as follows.*

1. *Set the initial values of the vector moments at  $z_1$ , (in terms of the single unknown component  $m_{1,0}$  if  $i \neq 1$ , or  $m_{1,0}(z_1^-)$  if  $i = 1$ )*

*- For  $i \neq 1$*

$$\begin{cases} \lambda_{11} m_{1,0} + v_1^1 m_{1,0}(z_1^-) = 0 \\ \lambda_{1\alpha} m_{1,0} + v_\alpha^1 m_{\alpha,0}(z_1^-) = 0 \\ \alpha \in [2, \dots, n], \end{cases} \quad (36a)$$

and

$$\begin{cases} \lambda_{1,\alpha} m_{1,q} + v_{\alpha}^1 m_{\alpha,q}(z_1^-) = 0 \\ \alpha \in [2, \dots, n], \\ \lambda_{11} m_{1,q} - q m_{1,q-1} + v_1^1 m_{1,q}(z_1^-) = 0 \quad \alpha = 1; \\ \text{for } q = 1, \dots, k, \end{cases} \quad (37a)$$

- For  $i = 1$

$$m_{1,q} = \frac{q!}{(-\lambda_{11})^{q+1}} \quad q = 0, 1, \dots, k \quad (36b)$$

$$\lambda_{1\alpha} m_{1,q} + v_{\alpha}^1 m_{\alpha,q}(z_1^-) = 0 \quad (37b)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha \neq 1 \quad q = 0, 1, \dots, k.$$

The only unknown parameters in the left-hand side of (37a-b) are the scalar values  $m_{1,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , if  $i \neq 1$  or  $m_{1,q}(z_1^-)$ ,  $q = 1, \dots, k$ , if  $i = 1$ . Note that  $m_{\alpha,q}(x)$  is the  $\alpha^{\text{th}}$  component of  $\vec{m}_q(x)$ .

2. Propagate the initial vector  $\vec{\Gamma}_k(z_1^-)$  by using (25), Thus given:

$$\vec{m}_q(z_1^-) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda_{11}}{v_2^1} \\ \frac{-\lambda_{12}}{v_2^1} \\ \vdots \\ \frac{-\lambda_{1n}}{v_n^1} \end{bmatrix} m_{1,q} \quad \text{if } i \neq 1, \quad \vec{m}_q(z_1^-) = \begin{bmatrix} m_{1,q}(z_1^-) \\ \frac{-\lambda_{12}}{v_2^1} m_{1,q}(z_1^-) \\ \vdots \\ \frac{-\lambda_{1n}}{v_n^1} m_{1,q}(z_1^-) \end{bmatrix} \\ \text{if } i = 1. \quad q = 0, 1, \dots, k.$$

$$\vec{\Gamma}_0(z_1^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \frac{v_1^1}{v_2^1} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{11}} \frac{v_1^1}{v_n^1} \end{bmatrix} m_{1,0}(z_1^-) \quad \text{for } q = 0.$$

and recalling the definition of  $\vec{\Gamma}_k$  in (23):

$$\vec{\Gamma}_k(z_2^+) = \exp(-A_{1,k} * (z_1 - z_2)) \vec{\Gamma}_k(z_1^-) \quad k \geq 0. \quad (38)$$

At that point, all values at  $z_2^+$  are known as a function of  $m_{1,q}(z_1^-)$ ,  $q = 0, \dots, k$  if  $i \neq 1$  or  $m_{1,q}(z_1^-)$ ,  $q = 0, \dots, k$  if  $i = 1$ .  $\vec{\Gamma}_k(z_2^-)$  is then computed by solving the following equations:

- For  $i \neq 2$

$$\begin{cases} \lambda_{2\alpha} m_{2,q} + v_{\alpha}^2 m_{\alpha,q}(z_2^-) - v_{\alpha}^1 m_{\alpha,q}(z_2^+) = 0 \\ \alpha = 1, \dots, n \quad \alpha \neq 2, \quad \text{for } q = 0, \dots, k, \\ \lambda_{22} m_{2,q} - q m_{2,q-1} + v_2^2 m_{2,q}(z_2^-) - v_2^1 m_{2,q}(z_2^+) = 0 \\ \text{for } q = 1, \dots, k, \\ \lambda_{22} m_{2,0} + v_2^2 m_{2,0}(z_2^-) - v_2^1 m_{2,0}(z_2^+) = 0 \\ \text{for } q = 0. \end{cases} \quad (39a)$$

- For  $i = 2$

$$m_{2,q} = \frac{q!}{(-\lambda_{22})^{q+1}} \quad q = 0, 1, \dots, k. \quad (39b)$$

Combining (38) and (39a) the additional set of unknowns is respectively  $m_{2,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$  if  $i \neq 1$  or  $m_{2,q}(z_2^-)$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , if  $i = 1$ .

3. Repeat step 2 with  $A_{j,k}$  substituted for  $A_{1,k}$  in (38),  $z_j$  substituted for  $z_1$  and  $z_{j+1}$  substituted for  $z_2$ . Furthermore (39a) and (39b) are replaced by:

- for  $j \neq i$  not a regeneration state:

$$\begin{cases} \lambda_{j\alpha} m_{j,q} + v_{\alpha}^j m_{\alpha,q}(z_j^-) - v_{\alpha}^{j-1} m_{\alpha,q}(z_j^+) = 0 \\ \alpha = 1, \dots, n \quad \alpha \neq j, \quad \text{for } q = 0, 1, \dots, k, \\ \lambda_{j,j} m_{j,q} - q m_{j,q-1} + v_j^j m_{j,q}(z_j^-) - v_j^{j-1} m_{j,q}(z_j^+) = 0 \\ \text{for } q = 1, \dots, k, \\ \lambda_{j,j} m_{j,0} + v_j^j m_{j,0}(z_j^-) - v_j^{j-1} m_{j,0}(z_j^+) = 0 \\ \text{for } q = 0. \end{cases} \quad (40a)$$

- For  $j = i$

$$m_{i,q} = \frac{q!}{(-\lambda_{ii})^{q+1}} \quad q = 0, 1, \dots, k.$$

for  $\alpha \neq i$

$$\begin{aligned} \lambda_{i\alpha} m_{i,q} + v_{\alpha}^i m_{\alpha,q}(z_i^-) - v_{\alpha}^{i-1} m_{\alpha,q}(z_i^+) &= 0 \quad (40b) \\ \alpha &= 1, 2, \dots, n; \quad \text{for } q = 0, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

For each value of  $j$ , additional sets of unknowns are either  $m_{j,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , if  $j \neq i$ , or  $m_{j,q}(z_j^-)$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , if  $j = i$ .

4. At  $z_m$ ,  $\Gamma_k(z_m^-)$  must satisfy the following orthogonality condition:

$$\begin{bmatrix} w'_{1,l} \\ w'_{2,l} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ w'_{m-1,l} \\ w'_{m,l} \end{bmatrix} \cdot \bar{\Gamma}_k(z_m^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$j = 1, \dots, m, \quad l = 0, \dots, k,$$

where in (41),  $w'_{j,l}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $l = 0, 2, \dots, k$  represent the generalized grade  $l$  left eigenvectors of  $A_{m,k}$  associated with the  $m$  eigenvalues with non positive real part.

Once  $\bar{m}_q(x)$  and  $m_{j,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, m$ , are known,  $C_{i,q}$  for  $q = 0, 1, \dots, k$  are obtained by integrating over  $x$  according to equation (20).

### Proof:

The theorem can be derived by performing calculations similar to those in Lemma 2 on a Laplace transform version of the PDE system defined in Lemma 1 combined with utilization of Lemma 2. Thus (37a), (39a), (40a) follow from boundary conditions of type (6a) and (6b) in Theorem 1. (38) follows from Lemma 2. (37b), (39b) and (40b) follow from the modified boundary condition (7) in Lemma 1 together with initial condition (8). (41) derives from boundary condition (24a) (as  $x \rightarrow -\infty$ ) in Lemma 2. Indeed, the calculation of  $\bar{m}_q(x)$   $q = 0, 1, \dots, k$  and  $m_{j,q}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$  proceeds by propagating equations from the first region  $R_1$ , down to the last region  $R_m$ . In each region, a total of  $k+1$  new unknowns is generated, namely  $m_{j,q}$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , if  $j \neq i$  (not a regeneration hedging point) or  $m_{j,q}(z_j^-)$ , if  $j = i$  (i.e.  $z_j$  is the chosen regeneration hedging point). Once the infinite region  $R_m$  is reached, a total of  $m \times (k+1)$  unknowns has been accumulated. At that point one uses the additional boundary conditions at minus infinity stating that  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{m}_q(x) = 0$ ,  $q = 0, 1, \dots, k$ , which is equivalent to

requiring that the vector  $\vec{\Gamma}_k(z_m^-) = [\vec{m}_0^t(x), \dots, \vec{m}_k^t(x)]^t$  be orthogonal to the left eigenspace associated with the exactly  $m$  distinct eigenvalues of  $A_{m,k}$  with negative or zero real parts, and multiplicity  $k+1$ . That  $m$  is the number of such eigenvalues is dictated by the ergodicity criterion developed in [11] Theorem 2, and equivalent to assumption (11). This eigenspace is of dimension  $(k+1) \times m$  and (41) provides the required additional equations. ■

## 5 Padé approximants and asymptotic estimates of the cost functional

Recall that our main objective is to be able to estimate the finite horizon cost under an arbitrary time-invariant hedging point control policy. Thus, an inverse Laplace transform must be performed using equation (18). The Padé approximants are a particular type of rational fraction approximation to the value of a function [2]. In this context, the main idea behind the use of this approximation technique is to match the Taylor series expansion of the Laplace transform of functions of time of interest as far as possible. Thus, Padé approximants will provide a rational fraction approximation  $\frac{P_{p+\nu}(s)}{Q_p(s)}$  which will partially match (first  $2p + \nu$  coefficients) the Taylor series expansion associated say with both the numerator and denominator of the Laplace transform of the cost functional in (18).  $P_{p+\nu}(s)$  and  $Q_p(s)$  are polynomials with degree  $p + \nu$  and  $p$  respectively,  $\nu \geq (-1)$ , [2]. Given that as  $s \rightarrow 0$  in a Laplace transform, it is the behavior as  $T \rightarrow \infty$  which is captured, inverse transformation of the Padé approximants will provide estimates of the finite horizon cost functional which improve for a given order of approximation as  $T$  increases. For applications of Padé approximants in the area of communications see [25].

Now when carrying out Padé approximants, a question of great relevance is whether the series to be approximated is a so-called Stieltjes' series [2]. The importance of Stieltjes' series stems from the fact that, even though in many practical

applications Padé approximants can still function very well for non Stieltjes' series, few general results are known outside the realm of such series insofar as convergence characteristics and structural properties of the approximants. Importantly, Stieltjes' series are such that any sequence of  $\frac{P_{p+\nu}(s)}{Q_p(s)}$  approximants to an analytic function in the cut complex plane converges to that function as  $p$  tends to infinity,  $\nu \geq (-1)$ . The convergence is uniform with respect to  $p$  for every point in  $|s| < R$ , whereas it is geometric with respect to  $p$  and it is pointwise in  $-\infty < s < -R$ , where  $R$  is the radius of convergence of the power series  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n$  (theorem 16.2 pp.220 [2]). Furthermore, for Stieltjes' series, all poles given by Padé approximants to this type of series are negative real with all residues positive and the roots of the numerator interlace with these poles (theorem 15.1 pp.213 [2]). Therefore, *provided that both numerator and denominator infinite series in (18) are Stieltjes' series*, by using higher orders of Padé approximants for each, one can improve the approximation of  $C_i(T)$  via a sequence of *stable* approximating functions.

In what follows, we review the definition of Stieltjes' series and report a determinantal condition which is both necessary and sufficient for a series to be Stieltjes. Subsequently we present arguments that establish that both numerator and denominator of (18) satisfy at least necessary conditions for being series of Stieltjes.

A series  $f(s) = \sum_0^{\infty} f_j (-s)^j$  is said to be a Stieltjes' series [2] if and only if there is a bounded, non decreasing function  $\phi(t)$  taking on infinitely many values in the interval  $0 \leq t \leq \infty$  such that

$$f_j = \int_0^{\infty} t^j d\phi(t).$$

Furthermore, a necessary and sufficient condition for a series to be Stieltjes [2] is that all determinants  $D(m, n)$  defined by:

$$D(m, n) = \begin{bmatrix} f_m & f_{m+1} & \cdots & f_{m+n} \\ f_{m+1} & f_{m+2} & \cdots & f_{m+n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{m+n} & f_{m+n+1} & \cdots & f_{m+2n} \end{bmatrix}$$

for  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ,

be positive. Note that for the above determinantal inequalities to hold, they should *at least* hold for the associated series  $f(s) = \sum_0^\infty f_j j! (-s)^j$ .

We now go back to (18) and establish that the above necessary condition holds for the infinite series in both numerator and denominator. We start with the denominator of (18) which satisfies the necessary condition automatically since the sequence of  $\mu_k$ 's corresponds by definition to the moments of the time to first return to  $z_i$  in mode  $i$  p.d.f, i.e.,  $\mu_k = \int_0^\infty t^k g_{ii}(t) dt$ . This, by definition, corresponds to a Stieltjes series. Furthermore, the numerator of (18), is given by

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \bar{m}_k(x) dx \frac{(-s)^k}{k!},$$

and the associated series obtained by eliminating the  $\frac{1}{k!}$  term can be shown to be a Stieltjes' series. Indeed, we have the following proposition

**Proposition 1** *If the running cost  $\ell(x)$  is convex, with a minimum at zero, and bounded in growth by  $M |x|^p$  for  $M$  some positive constant and finite integer power  $p \geq 1$ , then the following infinite series:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \bar{m}_k(x) dx (-s)^k \quad (42)$$

*is a Stieltjes' series.*

**Proof:** See Appendix A. ■ In Summary, while the numerical results to be reported in the next section correspond to a Stieltjes' series type of behavior, we are only able to establish that *necessary conditions* for the two infinite series in the numerator and denominator of (18) to be Stieltjes' series hold.

## 6 Analytical and simulation results

We start by considering the type of system presented in [24]. The manufacturing system is characterized by a two states Markov chain having the following transition matrix:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Let  $r = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}}$  and  $q_1 = -\lambda_{11}$ . The system must satisfy a given and constant demand rate  $d$ . The random capacity of the machine is such that  $\bar{u}_1 > d$  and  $\bar{u}_2 = 0$ . Define  $v_1$  and  $v_2$  as in Theorem 1. The index of the generic region is omitted since we have only one feasible state and hence one hedging inventory level. We assume that transition rates are such that ergodicity assumption (11) is satisfied. Under assumption (11), the system admits one zero eigenvalue and one positive real eigenvalue,  $\gamma_2$  and  $\gamma_1$  respectively:

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_{11}(rv_1 + v_2)}{v_1 v_2}. \quad (44)$$

Using Lemmas 3 and 4, the obtained grade 4 generalized eigenvectors associated with  $\gamma_j$ ,  $j = 2, 1$ , are respectively as follows:

$$w_{2,4} = \begin{bmatrix} r \\ 1 \\ \frac{rv_2(-v_1+v_2)}{q_1(rv_1+v_2)^2} \\ \frac{rv_1(v_1-v_2)}{q_1(rv_1+v_2)^2} \\ \frac{-2r(v_1-v_2)^2(rv_1-v_2)v_2}{(q_1)^2(rv_1+v_2)^4} \\ \frac{2rv_1(v_1-v_2)^2(rv_1-v_2)}{(q_1)^2(rv_1+v_2)^4} \\ \frac{-6r(v_1-v_2)^3v_2(r^2v_1^2-3rv_1v_2+v_2^2)}{(q_1)^3(rv_1+v_2)^6} \\ \frac{6rv_1(v_1-v_2)^3(r^2v_1^2-3rv_1v_2+v_2^2)}{(q_1)^3(rv_1+v_2)^6} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$w_{1,4} = \begin{bmatrix} -\frac{v_2}{v_1} \\ 1 \\ \frac{rv_2(-v_1+v_2)}{q_1(rv_1+v_2)^2} \\ \frac{v_2(-v_1+v_2)}{q_1(rv_1+v_2)^2} \\ \frac{2r(v_1-v_2)^2(-rv_1+v_2)v_2}{(q_1)^2(rv_1+v_2)^4} \\ \frac{2(v_1-v_2)^2(-rv_1+v_2)v_2}{(q_1)^2(rv_1+v_2)^4} \\ \frac{-6r(v_1-v_2)^3v_2(r^2v_1^2-3rv_1v_2+v_2^2)}{(q_1)^3(rv_1+v_2)^6} \\ \frac{-6(v_1-v_2)^3v_2(r^2v_1^2-3rv_1v_2+v_2^2)}{(q_1)^3(rv_1+v_2)^6} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Note that from these two vectors one can retrieve grade 1,2,3 generalized eigenvectors for the matrices  $A_k$ ,  $k < 4$  (31). Also, they are sufficient to generate the corresponding chain of independent eigenvectors  $v_{j,i}$  as defined before,  $j = 1, 2$ , and



$l = 1, 2, 3, 4$ . The different moments of  $g_{ii}(t)$  are given by

$$\mu = \frac{v_1(1+r)}{q_1(rv_1+v_2)}, \quad (47)$$

$$\mu_2 = \frac{2v_1(rv_1^2 + r^2v_1^2 + r^3v_1^2 + 2r^2v_1v_2 + v_2^2 + 2rv_2^2)}{q_1^2(rv_1+v_2)^3}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 = & \frac{6v_1(r^2v_1^2 + r^3v_1^4 + r^4v_1^4 + r^5v_1^4 - rv_1^3v_2 - r^2v_1^3v_2 + 2r^3v_1^3v_2 + 4r^4v_1^3v_2)}{q_1^3(rv_1+v_2)^5} \\ & + \frac{6v_1(4rv_1^2v_2^2 + 5r^2v_1^2v_2^2 + 7r^3v_1^2v_2^2 - rv_1v_2^3 + 5r^2v_1v_2^3 + v_2^4 + 3rv_2^4)}{q_1^3(rv_1+v_2)^5}. \end{aligned} \quad (49)$$

In order to simplify the expressions reported here, we will fix  $v_1 = 1$  and  $v_2 = -1$ . The first two coefficients in the infinite series at the numerator of (19) are given by

$$\begin{aligned} C_{1,1} = & \frac{0.2(2 - 12\exp(q_1(1-r)z_1) - 2r + 12r\exp(q_1(1-r)z_1))}{q_1^2(r-1)^3} \\ & + \frac{0.2(q_1z_1 - q_1rz_1 - q_1r^2z_1 + q_1r^3z_1)}{q_1^2(r-1)^3}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} C_{1,2} = & \frac{0.2(4 - 24\exp(q_1(1-r)z_1) + 2r - 12r\exp(q_1(1-r)z_1) + 8r^2)}{q_1^3(r-1)^5} \\ & + \frac{0.2(2r^3 - 12r^3\exp(q_1(1-r)z_1) + 3q_1z_1 + 12q_1z_1\exp(q_1(1-r)z_1))}{q_1^3(r-1)^5} \\ & + \frac{0.2(-5q_1rz_1 - 12q_1rz_1\exp(q_1(1-r)z_1))}{q_1^3(r-1)^5} \\ & + \frac{48r^2\exp(q_1(1-r)z_1)}{q_1^3(r-1)^5} + \frac{2q_1r^2z_1 - 12q_1r^2z_1\exp(q_1(1-r)z_1)}{q_1^3(r-1)^5} \\ & + \frac{0.2(-2q_1r^3z_1 + 12q_1r^3z_1\exp(q_1(1-r)z_1) + 3q_1r^4z_1 - q_1r^5z_1)}{q_1^3(r-1)^5}. \end{aligned} \quad (51)$$

The complexity of the analytic expressions increases as we consider higher order terms in the asymptotic series. If we now keep only the inventory level  $z_1$  as a parameter and we fix  $r = 2$ ,  $q_1 = 1$ , application of Padé approximation to equation (19) for  $k = 4$ ,  $\nu = -1$  and  $p = 2$ , yields :

$$C_1(s) \approx \frac{1}{3s^2} \frac{a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0} \frac{s^2 + 0.5615s + 0.0538}{0.3641s + 0.0538}, \quad (52)$$

$a_0 = \frac{a_{01}}{a_{02}}$ ,  $a_1 = \frac{a_{11}}{a_{12}}$ ,  $b_0 = \frac{b_{01}}{b_{02}}$ ,  $b_1 = \frac{b_{11}}{b_{12}}$ , with  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_{01}$ ,  $b_{02}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{12}$  defined in Appendix B.

For the three-state (two feasible) machine case [23], analytical Padé approximants are obtained when hedging levels are left in symbolic form. Unfortunately

the expressions calculated using Mathematica software become so complex that they are no longer of great use.

The chosen sample manufacturing system evolves according to an irreducible Markov chain with intensity matrix:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$c^+ = 0.2, \quad c^- = 1;$$

In addition, Figure 2 and Figure 4 represent (for the two-state machine and the three-state machine cases respectively) a verification of the quality of the Padé approximation with seven coefficients retained in the series expansion, by comparing it for a given choice of the hedging level (the infinite horizon optimal value) to the results obtained by direct numerical (Lax-Wendroff method [27]) of the PDE system in Theorem 1. Note that the curves shown are for  $\frac{C_i(T)}{T}$ , and they match very closely *even for small values* of the horizon length. Figure 3 and Figure 5 are examples of numerical synthesis of an optimal TIHC policy for the two-state machine and the three-state machine examples respectively, using the Padé approximants approach.

The important fact that must be underlined here is that for example in the two-state machine case, Padé approximants provide after a short one-time calculation based on Theorem 3 a *generic expression* of  $C_i(T)$  as a function of the arbitrary hedging level  $z_1$  (see (52)). Optimization can be readily carried out using that expression. The alternative optimization methodology based on the numerical solution of the PDE system of Theorem 1, would require the Lax-Wendroff solution of a two-dimensional PDE *for every search value* in the hedging level space. Furthermore, while in the multi-state machine case no useful generic expressions of  $C_i(T)$  in terms of the hedging levels can be developed, all Jordan types of computations (31) need to be carried out only once (Jordan forms are not affected by the particular choices of hedging levels). The calculations that need to be performed for every point in the hedging levels search space are the relatively innocuous (linear

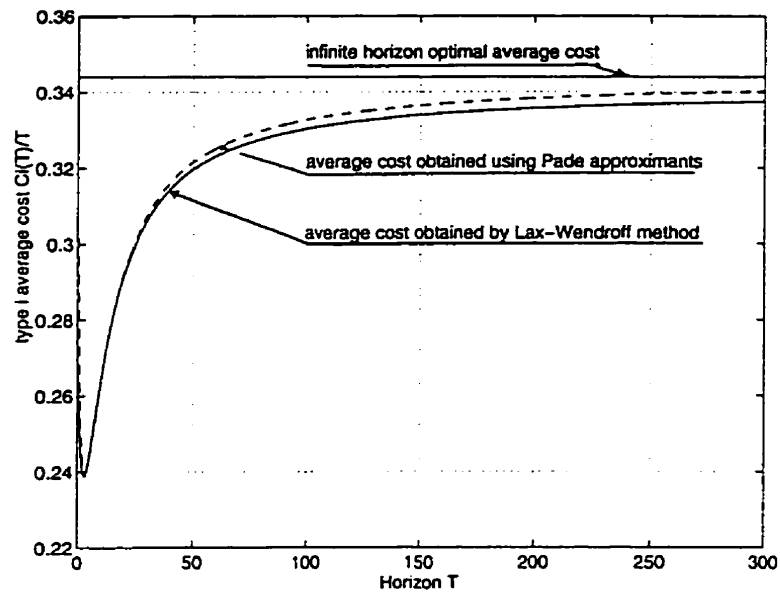


Figure 2: Application of Padé approximants to the two state (one feasible) machine case ( $z_1 = 1.3863$ ). Rational approximants of order 5 have been used.

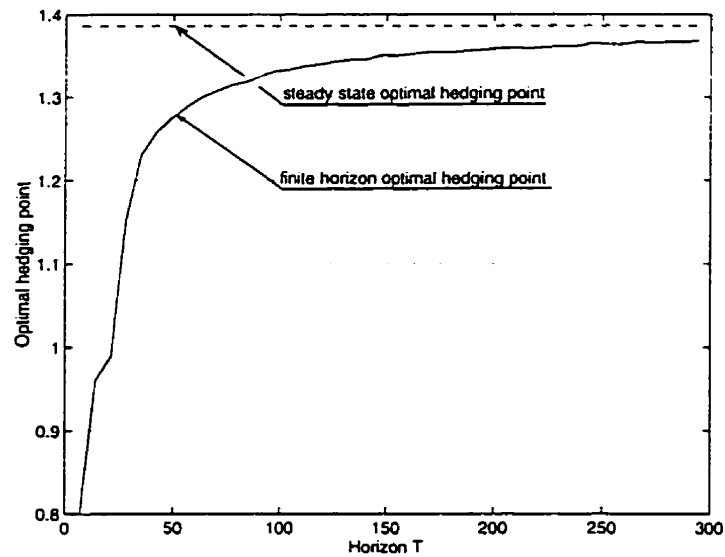


Figure 3: Optimal hedging point using Padé approximants

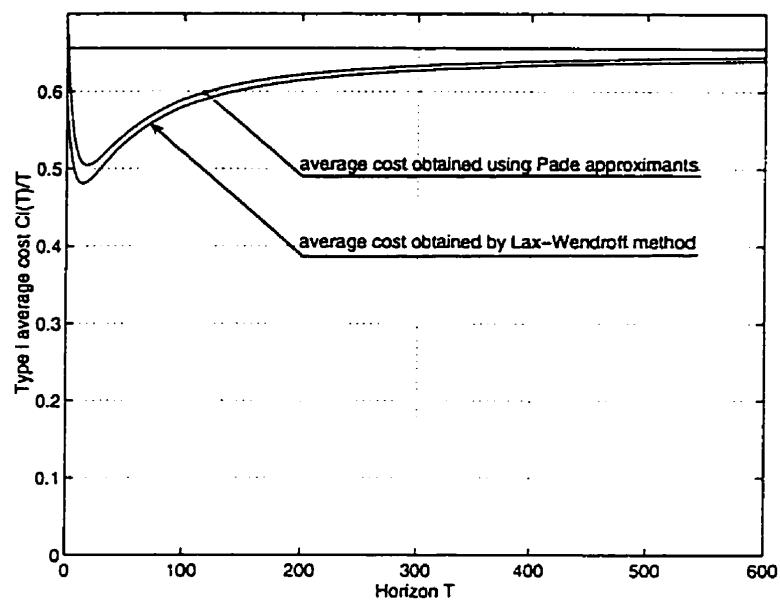


Figure 4: Application of Padé approximants to the three state (two feasible) machine case ( $z_1 = 3.0678$ ,  $z_2 = 2.9156$ ). Rational approximants of order 5 have been used.

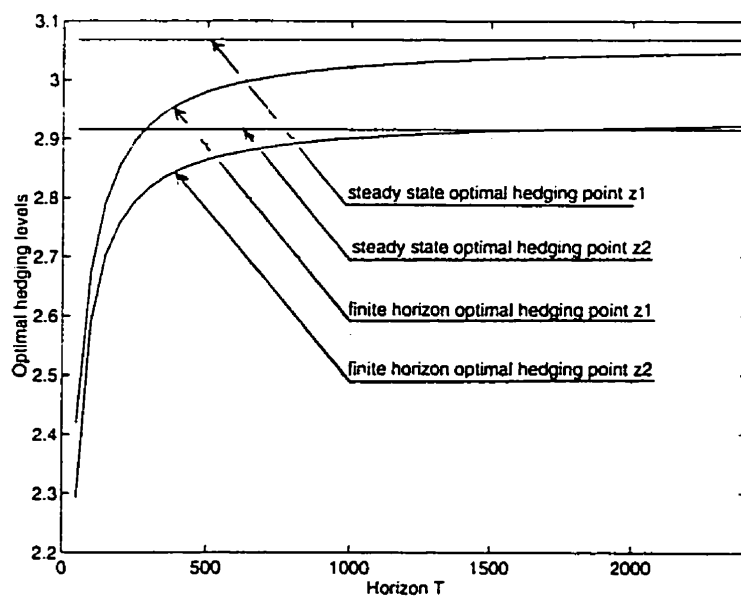


Figure 5: Optimal hedging levels using Padé approximants

algebraic) ones in Theorem 3, while generic expressions for integrals such as in (20) in terms of the arbitrary unknowns of Theorem 3 equation (44a-b) can be developed off-line based on the calculated Jordan form. In addition, once enough terms of the infinite series are computed, simple linear algebraic types of computations for Padé approximants must be carried out. Thus, the repetitive part of the computations is quite limited compared to a complete Lax-Wendroff solution up to time  $T$  (together with the numerical integration to compute the cost functional) if a PDE based type of algorithm is chosen. Finally note that while in the paper (Fig. 5 for example), we have computed optimal hedging levels for *every horizon length up to time  $T$* , in practice we only need the optimum for a single length of horizon  $T$ . This means having to search over a lot fewer points in the hedging levels search space (particularly for large  $T$  where one can initialize the search with infinite horizon hedging levels).

## 7 Conclusion

We have considered the finite horizon optimal flow control problem for single part multiple failure state manufacturing systems when controls are restricted to the sub-optimal class of time-invariant hedging control policies (TIHC). A renewal equation for the finite horizon (length  $T$ ) cost functional has been developed and used as a basis for generating the coefficients of an infinite series expansion of the Laplace transform of the functional when viewed as a function of  $T$ .

Calculation of the infinite series coefficients is based on solving a system of piecewise-smooth coupled differential equations, and is organized according to a recursive scheme. The coefficients depend on the particular choice of hedging level parameters. For each choice of parameters, Padé approximants can be used to obtain an approximation of the cost functional which improves as the length of the control horizon increases. Numerical experiments suggest that the quality of the approximation is in fact very good. The search for optimal parameters becomes

a numerical optimization problem. For a given numerical application, calculations can be performed orders of magnitude quicker than the competing optimization method based on repetitive solutions of the PDE system of Theorem 1 for different hedging levels. In order to give an idea of the length of computations, for the particular sample three-state manufacturing system in Section 6, *optimization* for a single value of control horizon required on average approximately 10 minutes. That is 15 times less than what is required for a single run of Lax-Wendroff solution for a *fixed hedging level* (without optimization). Notice that the algorithms proposed in this paper can also be applied to the transient optimization of failure prone *multi-part* manufacturing systems if one uses the partwise decoupled suboptimal control strategies of Caramanis and Sharifnia [10]. Furthermore, the same theory can, with very minor changes, be applied to the case where machines failure rates depend on the instantaneous machine rates of production (See Hu and al. [8]). Indeed, the renewal structure of the cost functional (equation (13)) is still preserved in that case.

In future work, we shall report on an analysis of the singularities associated with the Laplace transform of the finite horizon cost functional, what they can tell us about the rates of convergence to steady-state, and suboptimal control policies.

## Acknowledgment

The authors would like to thank the anonymous reviewers for their insightful suggestions, questions and comments. This work was supported by the National Research Council on Science and Engineering of Canada under grant OGP0006820 and by a joint FCAR fund of the province of Quebec and Bell Northern Research under grant BN1007.

## Appendix A

### Sketch of the proof of the analyticity of the Laplace Transform at $s = 0$

The proof proceeds in two steps. In the first step, following Malhamé [11] we adjoin to the PDE system with boundary conditions in Lemma 1, an additional absorbing boundary in the  $R_m$  infinite region at some finite level  $z_\Delta$ . We show via stochastic domination types of arguments that for this modified system, the total enclosed probability mass decays exponentially with time, and are able to conclude that all Laplace transforms exists for  $\Re[s] > \alpha$  where  $\alpha$  is strictly positive scalar. Thus,  $s = 0$  is *inside* the region of convergence of all Laplace transforms. But Laplace transforms are analytic inside their region of convergence [4]. Thus  $s = 0$  is a point of analyticity. We further show that even as  $z_\Delta$  goes to minus infinity, the analyticity at  $s = 0$  is retained.

The second step of the proof consists in asking whether the introduction of an absorbing boundary at minus infinity modifies in any significant way the PDE system of Lemma 1. We know that for  $t$  finite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x, t) = 0$ . However, this may not be the case as  $t$  goes to infinity, particularly if the system is not feasible in the long run. However, *under the ergodicity criterion* in (11), a steady-state will be reached and the steady-state solution is such that  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = 0$ . Thus for the ergodic case the analyticity of Laplace transforms at  $s = 0$  is retained, given that the added boundary condition at minus infinity *does not modify* the PDE system of Lemma 1.

## Proof of Lemma 2

Recall, that in each region  $R_i$  the hybrid density vector  $\vec{f}(x, t)$  evolves according to:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}(x, t)}{\partial t} &= -V_i \frac{\partial \vec{f}(x, t)}{\partial x} + \Lambda^t \vec{f}(x, t), \forall x \in R_i \\ i &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

By taking Laplace transforms on both sides of (A.1) we obtain, for  $s$  in the region of convergence of the Laplace transform, and using Lebesgue's dominated convergence theorem together with the assumption of absolute continuity of  $\vec{f}(x, t)$  in each  $R_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}(x, s)}{\partial x} &= -V_i^{-1}(sI - \Lambda^t) \vec{F}(x, s) + V_i^{-1} \vec{f}(x, 0). \\ i &= 1, \dots, m, \quad \text{and} \quad \forall x \in R_i \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Note that by evaluating this expression at  $s = 0$ , (which is allowed because we have assumed that under condition (11),  $s=0$ , is in the region of convergence of the Laplace transform), we obtain (21) for  $q = 0$  if we recall that  $\vec{f}(x, 0) = 0 \forall x \in R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Further differentiating once (A.2) with respect to  $s$  for  $q = 1$ :

$$\frac{\partial^2 \vec{F}(x, s)}{\partial x \partial s} = -V_i^{-1} \vec{F}(x, s) - V_i^{-1}(sI - \Lambda^t) \frac{\partial \vec{F}(x, s)}{\partial s}.$$

Recalling (16) and letting  $s$  go to zero we have:

$$\frac{\partial \vec{m}_1(x)}{\partial x} = V_i^{-1} \vec{m}_0(x) + V_i^{-1} \Lambda^t \vec{m}_1(x) \quad \forall x \in R_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

which is (21) for  $q = 1$ . Now, differentiating twice (A.2) with respect to  $s$  yields:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \vec{F}(x, s)}{\partial x \partial s^2} &= -2 V_i^{-1} \frac{\partial \vec{F}(x, s)}{\partial s} - V_i^{-1}(sI - \Lambda^t) \frac{\partial^2 \vec{F}(x, s)}{\partial s^2} \\ \forall x \in R_i, \quad i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(A.3) suggests a general formula which we shall prove by induction. Assume that  $\frac{\partial^{q+1} \vec{F}(x, s)}{\partial x \partial s^q}$  satisfies for some  $q \geq 1$ :

$$\frac{\partial^{q+1} \vec{F}(x, s)}{\partial x \partial s^q} = -q V_i^{-1} \frac{\partial^q \vec{F}(x, s)}{\partial s^{q-1}} - V_i^{-1}(sI - \Lambda^t) \frac{\partial^q \vec{F}(x, s)}{\partial s^q}. \quad (\text{A.4})$$



Let us show that  $\frac{\partial^{q+2}\vec{F}(x,s)}{\partial x \partial s^{q+1}}$  will satisfy (A.4) with  $q$  replaced by  $q+1$ . Indeed, differentiating (A.4) once with respect to  $s$  yields:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{q+2}\vec{F}(x,s)}{\partial x \partial s^{q+1}} &= -q V_i^{-1} \frac{\partial^q \vec{F}(x,s)}{\partial s^q} - V_i^{-1} \frac{\partial^q \vec{F}(x,s)}{\partial s^q} - V_i^{-1}(sI - \Lambda^t) \frac{\partial^{q+1}\vec{F}(x,s)}{\partial s^{q+1}} \\ &= -(q+1) V_i^{-1} \frac{\partial^q \vec{F}(x,s)}{\partial s^q} - V_i^{-1}(sI - \Lambda^t) \frac{\partial^{q+1}\vec{F}(x,s)}{\partial s^{q+1}}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

which proves that (A.4) is true for  $(q+1)$  substituted for  $q$ . Given that (A.4) is true for  $q=1$ , it will then be true  $\forall q \geq 1$ . Multiplying (A.5) by  $(-1)^q$  and letting  $s$  go to zero yields:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{m}_q(x)}{dx} &= q V_i^{-1} \vec{m}_{q-1}(x) + V_i^{-1} \Lambda^t \vec{m}_q(x) \quad \forall x \in R_i \\ i &= 1, \dots, m, \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

This establishes (21). Formula (25) in the lemma can be deduced from (24). (24a) follows from (A.6), and the analyticity requirement of  $\vec{F}(x,s)$  at  $s=0$  (finiteness of  $\vec{m}_k(x) \forall x \in R_i, \forall k \geq 0$ ) under ergodicity assumption (11). Indeed otherwise, given that under (11), the  $A_{m,k}$ 's, which have the same distinct eigenvalues as  $V_m^{-1} \Lambda^t$ , have exactly  $n-m$  distinct eigenvalues with positive real parts, (theorem 2, [11]), unless (24a) is satisfied, the  $\vec{m}_k(x)$  will be infinite for  $x$  finite in  $R_m$  (see [11] for further details). ■

### Proof of Lemma 3

#### Proof:

We have

$$\left\{ \sum_{p=0}^{\ell-1} L_{j,0}^{(p)} [0 - k V_i^{-1}] L_{j,\ell-1}^{(\ell-1-p)} \right\} w_{j,\ell-1} + L_{j,0}^{(\ell)} u_\ell = \alpha_{\ell-1} w_{j,0}$$

yields after multiplication of both sides by  $Q_{i,0}$

$$\begin{aligned} &Q_{i,0} [0 - \ell V_i^{-1}] L_{j,\ell-1}^{(\ell-1)} w_{j,\ell-1} + \\ &\left\{ \sum_{p=1}^{\ell-1} [\Delta_j]^p Q_{i,0} [0 - \ell V_i^{-1}] L_{j,\ell-1}^{(\ell-1-p)} \right\} w_{j,\ell-1} + [\Delta_j]^\ell Q_{i,0} u_{\ell+1} = \alpha_{\ell-1} Q_{i,0} w_{j,0}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

where  $\Delta_j$  is a diagonal matrix defined as follows:

$$\Delta_j = \text{diag}[\lambda_j - \lambda_\ell] \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Thus the  $j^{\text{th}}$  row of  $\Delta_j$  presents only zero entries. This implies that the second and third term in the left hand of equation (A.7) have their  $j^{\text{th}}$  entry equal to zero also. Recalling (A.7) and using  $(Q_{i,0} w_{j,0})^t = [0 \dots 1_{j^{\text{th}}} \dots 0]^t$ , this yields:

$$-\ell \left[ \{Q_{i,0} V_i^{-1} \alpha_{\ell-2} P_{i,0}\} Q_{i,0} w_{j,0} \right]_{j^{\text{th}} \text{ row}} = \alpha_{\ell-1} \quad (\text{A.8})$$

which is the same as

$$\alpha_{\ell-1} = -\ell \alpha_{\ell-2} v'_{ji} \quad (\text{A.9})$$

$$= \ell! \alpha'_0 \quad (\text{A.10})$$

where  $V'_i = Q_{i,0} V_i^{-1} P_{i,0}$  and  $\alpha_0 = -v'_{ji}$ ,  $v'_{ji}$  being the  $j^{\text{th}}$  diagonal element of matrix  $V'_i$ . ■

## Proof of Lemma 4

Before stating the proof of Lemma 4, we need the following technical lemma

**Lemma 5** *Let  $L = \lambda_j I - A$ , where  $\lambda_j \in \{\lambda_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  the set all eigenvalues of  $A$  assumed distinct. Let  $B$  be any given non-singular matrix, then we have*

$$\text{rank}[L B L] = n - 1 \quad (\text{A.11})$$

**Proof:** Using Sylvester's inequality [1], we find that

$$n - 2 \leq \text{rank}[L B L] \leq n - 1. \quad (\text{A.12})$$

Thus to satisfy (A.11), we must prove that  $\text{rank}[L B L] \neq n - 2$ . Suppose that is not true and

$$\text{rank}[L B L] = n - 2 < n - 1. \quad (\text{A.13})$$

This yields:

$$[L B L]^* = 0, \quad (\text{A.14})$$

where  $(*)$  stands for adjoint operator. Let  $P$  and  $Q$  such that  $L = P \Lambda Q$ , where  $\Lambda$  is a diagonal matrix and  $P$  and  $Q$  are matrix composed by the right and left eigenvectors respectively ( $P Q = I$ ). Equation (A.14) can be written as

$$\Lambda^* Q B^* P \Lambda^* = 0, \quad \text{with} \quad \Lambda^* = \text{diag} \left[ \prod_{i=1}^n (\lambda_j - \lambda_i) \delta_{i,j} \right], \quad (\text{A.15})$$

where the Kronecker delta is such that  $\delta_{i,j} = 1$  if  $i = j$  and 0 otherwise. This yields

$$\Lambda^* Q B^* P \Lambda^* = \text{diag} \left[ \prod_{i=1}^n (\lambda_j - \lambda_i)^2 \delta_{i,j} \right] B'_{jj}, \quad (\text{A.16})$$

with  $B'_{jj}$  is the  $j^{\text{th}}$  diagonal entry of  $B' = Q B^* P$  which is equal to  $q_j B^* p_j$ .  $q_j$  and  $p_j$  are the left and right eigenvectors associated with  $\lambda_j$  respectively. Then to satisfy (A.14) we must have

$$q_j B^* p_j = \text{Trace}[B^* p_j q_j] = 0. \quad (\text{A.17})$$

Now, as  $B^*$  is a non-singular matrix,  $\text{rank}[p_j q_j] = 1$ , and necessarily  $\text{rank}[B^* p_j q_j^t] = 1$ ,  $\text{Trace}[B^* p_j q_j]$  cannot be equal zero since  $B^* p_j q_j^t$  possesses a unique non-zero eigenvalue. Thus  $[L B L]^* \neq 0$  and consequently  $\text{rank}[L B L] = n - 1$ . ■

#### Proof: of Lemma 4

In the following, 0 stands for the null matrix with the appropriate dimension and  $x$ 's denote vectors with possibly non zero elements. Let  $w_{j,0}^i$  be a right eigenvector of  $A_{i,0} = V_i^{-1} \Lambda^t$  associated with the eigenvalue  $\lambda_j$ , for some fixed  $i, j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ , i.e. :

$$L_{j,0}^i w_{j,0}^i = 0, \quad (\text{A.18})$$

where  $L_{j,k}^i = \lambda_j - A_{i,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , with  $A_{i,k}$  as defined in (25). In order to simplify notation, we shall drop the superscript  $i$  in the rest of this proof. Then, is

easy to see that:

$$L_{j,k} = \begin{bmatrix} L_{j,k-1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0_{n \times n(k-1)} & -k V^{-1} & \vdots & L_{j,0} \end{bmatrix} \quad k = 2, \dots, \quad (\text{A.19})$$

with

$$L_{j,1} = \begin{bmatrix} L_{j,0} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ -V^{-1} & \vdots & L_{j,0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Focusing now on  $L_{j,1}$  and in view of the fact that  $\lambda_j$  is an eigenvalue of  $A_1$  with multiplicity 2, then  $\text{rank}(\aleph(L_{j,1}^2)) = 2$ , where  $\aleph(\cdot)$  stands for the null space. Let  $w_{j,1}$  be a generalized eigenvector of  $L_{j,1}$ , which we partition as  $w_{j,1}^t = [w_{j,1}^{(1)}; u_1]$ , then

$$L_{j,1}^2 w_{j,1} = \begin{bmatrix} L_{j,0}^2 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ -V^{-1} L_{j,0} - L_{j,0} V^{-1} & \vdots & L_{j,0}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{j,1}^{(1)} \\ \dots \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

which yields for  $w_{j,1}^{(1)}$  and  $u_1$ :

$$L_{j,0}^2 w_{j,1}^{(1)} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$(-V^{-1} L_{j,0} - L_{j,0} V^{-1}) w_{j,1}^{(1)} + L_{j,0}^2 u_1 = 0. \quad (\text{A.23})$$

From (A.22), since  $\lambda_j$  has multiplicity one in  $A_{i,0}$ ,  $\text{rank}[\aleph(L_{j,0}^2)] = 1$ , it follows that  $w_{j,1}^{(1)} = \gamma w_{j,0}$  for some scalar  $\gamma$ . Now there always exists an eigenvector of  $A_1$  such that  $\gamma \neq 0$ , otherwise, from (A.23), the only eigenvectors of  $A_1$  would be of the form  $[0; \beta w_{j,0}]^t$  with  $\beta \neq 0$ , which cannot be true since there must exist two linearly independent generalized eigenvectors associated with  $\lambda_j$  in  $A_j$ . Thus, one must be able to pick  $\gamma \neq 0$ , and in particular  $\gamma = 1$ .

In this case (A.23) implies that there must exist a  $u_1$  such that:

$$-L_{j,0} V^{-1} w_{j,0} + L_{j,0}^2 u_1 = L_{j,0} (-V^{-1} w_{j,0} + L_{j,0} u_1) = 0. \quad (\text{A.24})$$

Note that  $u_1 \neq 0$ , otherwise  $V^{-1} w_{j,0}$  would also be an eigenvector of  $A_{j,0}$  which, as it can be shown, is excluded if the generator  $\Lambda$  corresponds to an irreducible Markov chain. Furthermore, (A.24) implies that,

$$-V^{-1} w_{j,0} + L_{j,0} u_1 = \alpha_0 w_{j,0}, \quad (\text{A.25})$$

for some scalar  $\alpha_0$ . Now  $\alpha_0$  cannot be zero for if it were the case then  $u_1 \neq 0$  would be such that:

$$(L_{j,0} V L_{j,0}) u_1 = 0. \quad (\text{A.26})$$

Thus using Lemma 5,  $\text{rank}[N(L_{j,0} V L_{j,0})] = 1$ . Consequently  $u_1$  would have to be equal to some  $\beta w_{j,0}$  where  $\beta \neq 0$ . In that case (A.24) yields that  $V^{-1} w_{j,0}$  is also an eigenvector of  $A_0$  which, as we mentioned earlier, is excluded. So there must exist a  $u_1 \neq 0$ , and  $\alpha_0 \neq 0$  satisfying (A.25). In this case, since  $[w_{j,0} : u_1]^t \neq 0$ ,  $L_{j,1}^2 [w_{j,0} : u_1]^t = 0$  and  $L_{j,1} [w_{j,0} : u_1]^t \neq 0$  (from (A.25)),  $[w_{j,0} : u_1]^t$  is a grade 2 generalized eigenvector of  $A_1$ .

Suppose now that  $w_{j,k-1} = [w_{j,k-2}, u_{k-1}]^t$  is the grade  $k$  generalized eigenvector of  $A_{k-1}$  associated with  $\lambda_j$  such that:

$$\left\{ \sum_{p=0}^{k-2} L_{j,0}^{(k-2-p)} [0, -(k-1) V^{-1}] L_{j,k-2}^p \right\} w_{j,k-2} + L_{j,0}^{k-1} u_{k-1} = \alpha_{k-2} w_{j,0} \quad (\text{A.27})$$

with  $u_{k-1} \neq 0$  and  $\alpha_{k-1} \neq 0$ . The grade  $k+1$  generalized eigenvector of  $A_k$  associated with  $\lambda_j$  can be constructed as follows:

$$w_{j,k} = \begin{bmatrix} w_{j,k}^{(1)} \\ u_k \end{bmatrix}$$

using equation (A.19),  $L_{j,k}^q$  is given by

$$L_{j,k}^{k+1} = \begin{bmatrix} L_{j,k-1}^{k+1} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ \sum_{p=0}^k L_{j,0}^p [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^{k-p} & \vdots & L_{j,0}^{k+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

we have

$$\begin{bmatrix} L_{j,k-1}^{k+1} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ \sum_{p=0}^k L_{j,0}^p [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^{k-p} & \vdots & L_{j,0}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{j,k-1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

which yields

$$L_{j,k-1}^{k+1} w_{j,k}^{(1)} = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\sum_{p=0}^k L_{j,0}^{k-p} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k}^{(1)} + L_{j,0}^{k+1} u_k = 0. \quad (\text{A.31})$$

Since  $\lambda_j$  is an eigenvalue of  $A_{k-1}$  with multiplicity  $k$ , the  $\text{rank}[\mathfrak{N}(L_{j,k-1}^{k+1})] = k$ , thus  $w_{j,k}^{(1)} = \gamma w_{j,k-1}$  for some scalar  $\gamma$ . There always exists an eigenvector of  $A_k$  such that  $\gamma \neq 0$ , otherwise, from (A.31), the only eigenvectors of  $A_k$  would be of the form  $[0; \beta w_{j,0}]^t$  with  $\beta \neq 0$ , which cannot be true since there must exist  $k+1$  linearly independent generalized eigenvectors associated with  $\lambda_j$  in  $A_k$ . Thus, one must be able to pick  $\gamma \neq 0$ , and in particular  $\gamma = 1$ . Then (A.31) implies that there must exist a  $u_k$  such that

$$L_{j,0} \left( \sum_{p=0}^{k-1} L_{j,0}^{k-p-1} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k-1} + L_{j,0}^k u_k \right) = 0, \quad (\text{A.32})$$

which implies

$$\sum_{p=0}^{k-1} L_{j,0}^{k-p-1} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k-1} + L_{j,0}^k u_k = \alpha_{k-1} w_{j,0} \quad (\text{A.33})$$

for some scalar  $\alpha_{k-1}$ . Using equation (A.27), equation (A.33) can be written as

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{k-2} L_{j,0}^{k-p-1} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k-1} \\ - k \alpha_{k-2} V^{-1} w_{j,0} + L_{j,0}^k u_k = \alpha_{k-1} w_{j,0}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Now,  $\alpha_{k-1}$  cannot be zero. For if it were the case then:

$$(L_{j,0} V L_{j,0}) \left( \sum_{p=0}^{k-2} L_{j,0}^{k-p-2} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k-1} + L_{j,0}^{k-1} u_k \right) = 0 \quad (\text{A.35})$$

Thus the second term in the left-hand side of (A.35) must be equal to some  $\beta w_{j,0}$  where  $\beta \neq 0$ . Using Lemma 5 and equation (A.34) yields that  $V^{-1} w_{j,0}$  is also an eigenvector of  $A_0$  which as we mentioned earlier is excluded. Also,  $u_k$  can not be equal zero, for if it were the case then

$$\sum_{p=0}^{k-2} L_{j,0}^{k-p-1} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k-1} = (\alpha_{k-1} I + k \alpha_{k-2} V^{-1}) w_{j,0}. \quad (\text{A.36})$$

Two different scenarios can then happen. In the first one, suppose that  $(\alpha_{k-1} I + k \alpha_{k-2} V^{-1})$  is a non-singular matrix then equation (A.36) gives:

$$L_{j,0} (\alpha_{k-1} I + k \alpha_{k-2} V^{-1})^{-1} L_{j,0} \sum_{p=0}^{k-2} L_{j,0}^{k-p-2} [0, -k V^{-1}] L_{j,k-1}^p w_{j,k-1} = 0. \quad (\text{A.37})$$

which yields, using Lemma 5 and (A.37), the impossible fact that  $V^{-1} w_{j,0}$  is an eigenvector of  $A_0$ . In the second scenario, suppose  $(\alpha_{k-1} I + k \alpha_{k-2} V^{-1})$  is a singular matrix. Thus, there exists at least one entry of  $V^{-1}, \frac{1}{v_s}$  say, such that:

$$\alpha_{k-1} = -k \alpha_{k-2} \frac{1}{v_s}. \quad (\text{A.38})$$

Recalling the result given by Lemma 3:

$$\frac{1}{v_s} = q_{j,0} V^{-1} p_{j,0}. \quad (\text{A.39})$$

which is the same as

$$q_{j,0} \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} = \text{trace} \left[ \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} q_{j,0} \right] = 0. \quad (\text{A.40})$$

Let  $\text{rank} \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) = r$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ , then by Sylvester's inequality [1]

$$\text{rank} \left[ \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} q_{j,0} \right] \leq \min(r, 1) = 1, \quad (\text{A.41})$$

which suggests two possible cases. First of all, let

$$\text{rank} \left[ \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} q_{j,0} \right] = 1, \quad (\text{A.42})$$

then, since  $\left[ \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} q_{j,0} \right]$  possesses a unique non-zero eigenvalue, we have

$$\text{trace} \left[ \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} q_{j,0} \right] \neq 0. \quad (\text{A.43})$$

Secondly, let

$$\text{rank} \left[ \left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right) p_{j,0} q_{j,0} \right] = 0, \quad (\text{A.44})$$

and let  $q_{j,0} = [x_1, \dots, x_n]$  and  $p_{j,0} = [y_1, \dots, y_n]$  with  $q_{j,0} \cdot p_{j,0} = 1$ . Using the fact that  $\left( \frac{1}{v_s} I - V^{-1} \right)$  is a diagonal matrix, then to satisfy (A.44), we must have  $x_l = y_l = 0$  for all  $l = 1, \dots, n$  and  $l \neq \alpha$  and  $x_l y_l = 1$  for  $l = \alpha$ , which is excluded if the generator  $\Lambda$  corresponds to an irreducible Markov chain. Thus,  $u_k$  cannot be equal zero.

So there must exist a  $u_k \neq 0$ , and  $\alpha_{k-1} \neq 0$  satisfying (A.33). In this case, since  $\left[ w_{j,k-1} : u_k \right]^t \neq 0$ ,  $L_{j,k}^{k+1} \left[ w_{j,k-1} : u_k \right]^t = 0$  and  $L_{j,k}^q \left[ w_{j,k-1} : u_k \right]^t \neq 0$ ,  $q = 1, \dots, k$ ,  $\left[ w_{j,k-1} : u_k \right]^t$  is a grade  $k+1$  generalized eigenvector of  $A_k$ . ■

## Proof of Proposition 1

**Proof:** : Consider the  $k^{\text{th}}$  term in the series:

$$1^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell(x)}{k!} \tilde{m}_k(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1^t \ell(x) \int_0^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \tilde{f}(x, \tau) d\tau dx \quad (\text{A.45})$$

$$= \int_0^{\infty} \tau^k \left[ 1^t \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \tilde{f}(x, \tau) dx \right] d\tau. \quad (\text{A.46})$$

where use has been made of Tonelli's theorem [3]. Now define:

$$Q(t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} 1^t [\ell(x) \tilde{f}(x, \tau)] dx d\tau. \quad (\text{A.47})$$

In view of the non negativity of the time integrand,  $Q(t)$  is monotone increasing function. Following the definition of Stieltjes' series, (51) would then be a Stieltjes' series if  $Q(\infty)$  is finite. Now in view of the assumed properties of  $\ell(x)$ , and the fact that at any time  $\tau$ ,  $z_m - (d)(\tau) \leq x(\tau) \leq z_1$ , and  $\ell(x(\tau)) \leq \min[\ell(z_1), \ell(z_m - (d)(\tau))]$  then

$$\begin{aligned} Q(\infty) &\leq \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1^t [\ell(z_1) \tilde{f}(x, t)] dx d\tau \\ &\quad + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1^t [\ell(z_m - d\tau) \tilde{f}(x, t)] dx d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$



$$\begin{aligned}
&\leq \ell(z_1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 1^t [\tilde{f}(x, t)] d\tau dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} 1^t \int_0^{\infty} [M(z_m - d\tau)^p] \tilde{f}(x, t) d\tau dx
\end{aligned} \tag{A.49}$$

where in the above Tonelli's theorem [3] and the given bounds on  $\ell(x)$  have been used. Now clearly  $\int_0^{\infty} \tilde{f}(x, t) d\tau = \tilde{m}_0(x)$ , and given the system of equations (theorem 3) of which  $\tilde{m}_0(x)$  is a solution,  $\tilde{m}_0(x)$  is bounded every where in  $\cup_{i=1}^{m-1} R_i$ . The only region where it is possibly unbounded is  $R^m$ , but in fact, in view of (24a), it can only be of the form  $\sum_{j=1}^{n-m} \tilde{W}_j \exp(\lambda_j x)$  for some vectors  $\tilde{W}_j \in R^n$ , with the  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n-m$  eigenvalues of  $V_m^{-1} \Lambda^t$  with strictly positive real parts. Thus the first term in the right-hand side of (54) is bounded (since  $\tilde{m}_0(x)$  is integrable). Similarly, if one expands  $(z_m - d\tau)^p$  into a (finite) polynomial in  $\tau$ , one obtains for the second integral in (54), a linear combination of terms of the form  $\int_{-\infty}^{\infty} 1^t \tilde{m}_q(x) dx$  with  $q = 0, \dots, p$ . Furthermore in  $R_m$ , the components of  $\tilde{m}_q(x)$  are all linear combinations of terms of the form  $x^q \exp(\lambda_j x)$ ,  $q = 0, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, n-m$ . Thus the second integral in (54) is finite, and  $Q(t)$  is bounded. This completes the proof of the proposition. Notice that the same arguments could go through if the bound on the cost  $\ell(x)$  is exponential with the (real) coefficient of the exponential not exceeding the smallest real part of the  $\lambda_j$ 's,  $j = 1, \dots, n-m$ . ■

## Appendix B

### 1 Coefficients of Padé approximants for the two state machine case

$$\begin{aligned}
a_{01} &= 0.5(-0.4 + 2.4 \exp(-z_1) + 0.6z_1) \left( -198 + \exp(z_1)(66 + 75z_1 - 4.5z_1^2 \right. \\
&\quad \left. + 20.25z_1^3) + \exp(2z_1)(-5.5 - 2.5z_1 + z_1^2) - (360z_1 + 81z_1^2) \right) \\
a_{02} &= 1359 + \exp(z_1)(-453 - 238.5z_1 + 165z_1^2 - 51.75z_1^3 + 3.375z_1^4) \\
&\quad + \exp(2z_1)(37.75 - 14.25z_1 + z_1^2) + (1944z_1 + 72z_1^2 - 342z_1^3 - 60.75z_1^4)
\end{aligned}$$

$$a_{11} = 2.6 \left( -564.923 + \exp(z_1)(282.462 + 186.231z_1 - 31.8462z_1^2 + 112.154z_1^3 + 37.3846z_1^4) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \exp(2z_1) \left( -47.0769 + 16.1538z_1 - 10.9615z_1^2 - 30.8077z_1^3 \right. \\
& + 7.78846z_1^4 - 2.33654z_1^5 \left. \right) + \exp(3z_1)(2.6154 - 3.5192z_1 + 4.327z_1^2) \\
& - (938.769z_1 + 348.923z_1^2 + 37.3846z_1^3) \tag{B.1} \\
a_{12} & = \exp(z_1) \left( 1359 + \exp(z_1) \left( -453 - 238.5z_1 + 165z_1^2 \right. \right. \\
& - 51.75z_1^3 + 3.375z_1^4 \left. \right) + \exp(2z_1)(37.75 - 14.15z_1 + z_1^2) \\
& + (1944z_1 + 72z_1^2 - 324z_1^3 - 60.75z_1^4) \left. \right) \\
b_{01} & = 0.5 \left( -198 + \exp(z_1)(66 + 75z_1 - 4.5z_1^2 + 20.25z_1^3) \right. \\
& + \exp(2z_1)(-5.5 - 2.5z_1 + z_1^2) - (360z_1 + 81z_1^2) \left. \right) \\
b_{02} & = 1359 + \exp(z_1)(-453 - 238.5z_1 + 165z_1^2 - 51.75z_1^3 + 3.375z_1^4) \\
& + \exp(2z_1)(37.75 - 14.25z_1 + z_1^2) + (1944z_1 + 72z_1^2 - 342z_1^3 - 60.75z_1^4) \\
b_{11} & = 4.5 \left( -48 + \exp(z_1)(16 - 23.3333z_1 - 21.3333z_1^2 \right. \\
& + 5.25z_1^3 - 2.25z_1^4) + \exp(2z_1)(-1.3333 + 3.8889z_1 - z_1^2) + (72z_1^2 + 18z_1^3) \left. \right) \\
b_{12} & = \exp(z_1) \left( 1359 + \exp(z_1) \left( -453 - 238.5z_1 + 165z_1^2 \right. \right. \\
& - 51.75z_1^3 + 3.375z_1^4 \left. \right) + \exp(2z_1)(37.75 - 14.15z_1 + z_1^2) \\
& + (1944z_1 + 72z_1^2 - 324z_1^3 - 60.75z_1^4) \left. \right)
\end{aligned}$$

## References

- [1] C. T. CHEN. "*Linear System Theory and Design.*" Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1984.
- [2] G. A. BAKER. JR. "*Essentials of Padé Approximants.*" Academic Press, 1975.
- [3] R. G. BARTLE "*The Elements of Integration.*" John Wiley & sons, New York, 1966.
- [4] A. PRIESTELY "*Introduction to Complex Analysis.*" Oxford Science Publications, 1990.
- [5] G. J. OLSDER AND R. SURI. "Time-Optimal Control of Flexible Manufacturing Systems With Failure Prone Machines." *Proceedings of the 19<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, December 1980.
- [6] G. LIBEROPOULOS AND J. HU. "On the Ordering of Optimal Hedging Points in a Class of Manufacturing Flow Control Models." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-40 (no 2):pp. 282-286, February 1995.
- [7] J. B. KIMEMIA and S. B. GERSHWIN. "An Algorithm for the Computer Control of Production in Flexible Manufacturing Systems." *IIE Transactions*, vol. 15 (no 4):pp. 353-362, December 1983.
- [8] J. Q. HU, P. VAKILI and G. X. YU. "Optimality of Hedging Policies in the Production Control of Failure Prone Manufacturing Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39(no 9):pp. 1875-1880, September 1994.
- [9] J. R. PERKINS and R. SRIKANT. "Scheduling Multiple Part-Types in an unreliable Single Machine Manufacturing System." *Submitted to IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995.

- [10] M. C. CARAMANIS AND A. SHARIFNIA. "Near-Optimal Manufacturing Flow Controller Design." *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, vol.3 (no 4):pp. 321-336, 1991.
- [11] R. P. MALHAMÉ. "Ergodicity of Hedging Point Policies in Single Part Multiple State Manufacturing Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-38 (no 2):pp. 340-343, February 1993.
- [12] N. SRIVATSAN and Y. DALLERY. "Partial Characterization of Optimal Policies in Unreliable Multiple-Part-Type Systems." *Technical Report Laboratory for Manufacturing and Productivity LMP94-004*, 1994.
- [13] P. BRÉMAUD, R. P. MALHAMÉ and L. MASSOULIÉ . "A Manufacturing System with General Stationary Failure Process: Stability and IPA of Hedging Control Policies." *to appear in IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [14] P. GLASSERMAN. "Hedging-Point Production Control with Multiple Failure Modes." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40(no 4):pp. 707-711, April 1995.
- [15] Q. ZHANG AND G. YIN. "Turnpike Sets in Stochastic Manufacturing Systems with Finite Time Horizon." *Stochastics and Stochastics Reports*, vol.51:pp. 11-40, July 1994.
- [16] R. AKELLA and P. R. KUMAR. "Optimal Control of Production Rate in a failure Prone Manufacturing System." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31:pp.116-126, February 1986.
- [17] R. P. MALHAMÉ . "A Jump-driven Markovian Electric Load Model." *Advances in Applied Probability*, vol.22:pp. 564-586, 1990.

- [18] R. P. MALHAMÉ and E. K. BOUKAS. "A Markov Renewal Analysis of the Production Control of a Flexible Manufacturing System Under Hedging Point Policies." *GERAD Report*, G89-37, November 1981.
- [19] R. P. MALHAMÉ and E. K. BOUKAS. "A Renewal Theoretic Analysis of a Class of Manufacturing Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-36(no 5):pp. 353-362, May 1991.
- [20] R. RISHEL. "Dynamic Programming and Minimum Principles for Systems with Jump Markov Disturbances." *SIAM Journal on Control*, 13:pp. 338-371, February 1975.
- [21] S. B. GERSHWIN. "*Manufacturing Systems Engineering*." PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [22] S. P. SETHI and Q. ZHANG. "Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing systems." Birkhauser, Boston, 1994.
- [23] A. SHARIFNIA. "Production control of Manufacturing System with Multiple Machine States." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-33(no 7):pp. 620-625. July 1988.
- [24] T. BIELECKI and P. R. KUMAR. "Optimality of Zero-Inventory Policies for Unreliable Manufacturing Systems." *Operat. Res.*, vol. 26:pp. 532-540, July-Aug. 1988.
- [25] W. B. GONG, S. NONANUKUL and A. YAN. "Padé Approximation for Stochastic Discrete-Event Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(no 8):pp. 1349-1358, 1995.
- [26] W. H. FLEMING, S. P. SETHI AND H. M. SONER. "An Optimal Stochastic Production Planning Problem with Randomly Fluctuating Demand." *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25(no 6):pp. 1494-1502, November 1987.

- [27] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY and W. T. VETTERLING. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University, Press, 1988.

## ANNEXE III

# “Optimizing the Transient Behavior of Hedging Control Policies in Manufacturing Systems”

*Sami El-Férik<sup>1</sup> and Roland P. Malhamé<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Ecole Polytechnique de Montréal<sup>1</sup>, Mtl. Qué. H3C-3A7

<sup>2</sup> Gerad, Mtl., Qué.

## Key-words

Manufacturing Systems   Hedging Control Policies   Renewal processes

## Abstract

Single Part multiple failure mode manufacturing systems under the class of hedging control policies are considered. A renewal viewpoint of the dynamics is exploited to develop an integral equation for an integral type control cost functional over a finite time horizon  $T$ . The kernel of the integral equation is a first passage-time probability density and is obtained as the solution of an appropriate system of partial differential equations. We use that framework to show that the convergence to steady-state of the average cost per unit time cannot occur any faster than that the statistics of the underlying machine failure mode Markov chain. Closed form solutions for the cost functional asymptotics for the two failure state machine case are obtained for large  $T$ , and used to optimize hedging control policies over possibly large but nevertheless finite horizon.

## 1 Introduction

Starting with the seminal work of Kimemia and Gershwin [3], the class of hedging type control policies in manufacturing systems was recognized as very likely to comprise in many situations the optimal control policy. In the single part multiple state manufacturing system case, hedging policies are characterized by a set of critical inventory levels — one associated with each feasible machine state — towards which one must converge as quickly as possible. Using a dynamic programming framework Akella and Kumar [1] established rigorously the optimality of such a policy in the two state, single part, constant demand manufacturing system case. They also solved for the critical inventory level. Subsequently, Bielecki and Kumar [2] and Sharifnia [7] recognized that it was easier to solve a parameter optimization problem within the class of hedging control policies, rather than a full-fledged optimal control problem, and did so in the two-state and multiple-state

<sup>2</sup> E-mail: malhame@auto.polymtl.ca

machine cases respectively. All existing results however were based on optimizing the statistical steady-state of an ergodic system, and thus essentially dealt with infinite horizon problems.

In this paper we use extensions of the renewal theoretic framework first developed in [4], to derive an integral equation associated with an integral type performance functional over finite horizon, for the single part, multiple machine state case. The kernel of that integral equation is the probability density function associated with the time to first return to a given hedging level (in the corresponding machine state). The main quantities in the integral equation are obtained as solutions of coupled partial differential equations with appropriate boundary conditions. This framework is used to derive a theorem which constitutes a rather intuitive bound on the speed with which the time average of the cost functional converges to its ergodic steady-state (based on which existing optimal solutions have been obtained). It states essentially that this speed is bounded above by the settling speed of the statistics of the underlying machine failure state Markov chain. Subsequently, closed form expressions are obtained for the asymptotic cost functionals associated with hedging control policies in the particular case of a two-state manufacturing system, over a possibly large but finite time horizon. These expressions are used to optimize the choice of hedging levels over a finite horizon. The minimal length of the horizon for the asymptotic analysis to hold is characterized in terms of the parameters of the failure mode Markov chain.

## 2 An integral equation for finite horizon cost

We use the modeling framework of Sharifnia [7]. The parts production process is represented by a fluid flow with random disruptions. More specifically:

$$\frac{dx}{dt} = u_\alpha - d$$

$x(t)$  : parts surplus at time  $t$

$u_\alpha$  : production rate in failure mode  $\alpha$

$d$  : rate of demand for parts

- in mode  $\alpha$ ,  $u_\alpha$  is bounded by  $\hat{u}_\alpha$
- $\alpha$  evolves according to an irreducible finite state Markov chain with state transition intensity matrix  $A$ .
- $\alpha = 1, \dots, m$  feasible (i.e.  $\hat{u}_\alpha > d$ )  
 $\alpha = m+1, \dots, n$  infeasible.



A finite horizon integral cost  $J$  is considered:

$$J = E \left[ \int_0^T \ell(x_t) dt | x_0, \alpha_0 \right]$$

where  $\ell(x_t)$  is the cost per unit time at surplus level  $x_t$ . This cost is to be minimized.

The hybrid probability density vector

$\tilde{f}(x, t) = [f_1(x, t), \dots, f_n(x, t)]^T$  evolves according to [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial t} &= -V_i \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} + \Lambda^i \tilde{f}(x, t), \forall Z_{i+1} < x < Z_i \\ i &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

at hedging levels  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  and where  $Z_{m+1} = -\infty$ . The boundary conditions at hedging points are given by:

$$\lambda_{ij} P_{Z_i}(t) + v_j^i(t) f_j(Z_i^-, t) - v_j^{i-1}(t) f_j(Z_i^+, t) = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n; \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{Z_i}(t)}{dt} &= \lambda_{ii} P_{Z_i}(t) + v_i^i(t) f_i(Z_i^-, t) - v_i^{i-1}(t) f_i(Z_i^+, t) \quad (2b) \\ &\quad \text{for } j = i \end{aligned}$$

where the  $P_{Z_i}$ 's are the probability masses at  $Z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . In addition

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= 0 \quad \forall x > Z_1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{f}(x, t) &= 0; \end{aligned} \quad (2c)$$

Finally note that:

$$\begin{aligned} v_\alpha^i(t) &= u_\alpha^i(t) - d \quad \text{with } u_\alpha^i = \begin{cases} 0 & \alpha > i \\ u_\alpha & \alpha \leq i \end{cases} \\ V^i &= \text{diag} [v_\alpha^i] \end{aligned}$$

In [4], a Markov chain embedded into the hybrid state Markov process is defined by focusing on the successive instants where hedging points are reached and recording thereupon the corresponding machine state. When the machine state is in correspondance with the hedging point, the regeneration point will be called a hedging point state of the embedded Markov chain.

**Theorem 1** *Let  $i$  be a hedging point regeneration state from the embedded Markov chain [4]. The cost functional conditional to the initial state  $i$   $C_i(T)$  satisfies the following integral equation:*

$$C_i(T) = \int_0^T E [\ell(x(\tau)) | \alpha=i, x(0)=Z_i] d\tau + \int_0^T C_i(T-\tau) g_{ii}(\tau) d\tau \quad (3)$$

where in (3)

$g_{ii}(t)$  : the p.d.f. of the first return of  $x(t)$  to  $Z_i$  with machine state  $\alpha = i$ .

Thus the first term in the right-hand side of (3) represents the contribution of all the possible system trajectories up to the first passage-time, as well as those that never reached  $Z_i$  in state  $i$  at time  $t$ . In what follows, we show how one can obtain  $g_{ii}(t)$  as the solution of (1)-(2) but subject to slight modifications in the boundary conditions. Computation of the p.d.f of the first return to  $Z_i$  in machine state  $i$  proceeds as follows.

- set the appropriate initial p.d.f's and probability  $P_{Z_\alpha}(0)$ . ex:  $\tilde{f}(x, 0) = 0$ ,  $P_{Z_i}(0) = 1$ ,  $P_{Z_j}(0) = 0 \forall j \neq i$
- Set the appropriate absorbing boundary conditions relative to the initial state  $i$  by *eliminating the probability exchange term at the right-hand side of (2b)*. Thus

$$\lambda_{ij} P_{Z_j}(t) + v_j^i(t) f_j(Z_i^-, t) - v_j^{i-1}(t) f_j(Z_i^+, t) = 0$$

for  $j = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq i$

but:

$$\frac{dP_{Z_i}(t)}{dt} = \lambda_{ii} P_{Z_i}(t), \text{ for } j = i$$

and:

$$g_{ii}(t) = v_i^i(t) f_i(Z_i^-, t) - v_i^{i-1}(t) f_i(Z_i^+, t) \quad (4)$$

**Theorem 2** *The eigenvalues of the intensity matrix  $A$  of the machine state Markov chain are also solutions of the equation:*

$$1 - g_{ii}^*(s) = 0$$

where  $g_{ii}^*(s)$  is the Laplace transform of  $g_{ii}(t)$ .

All proofs are omitted but can be found in [6].

Using integral equation (3) and theorem 2, it is possible to conclude that the eigenvalues of  $A$  are poles of the Laplace transform expression of the cost functional. This implies that if one considers the time average  $\frac{1}{T} C_i(T)$  performance functional as in [2] or [1], it cannot reach steady-state any quicker than the statistics of the underlying machine state Markov chain. This puts a lower bound on the length of time horizon before one can hope that the ergodic optimum hedging points of [2] or [7] become acceptable approximations of the true optima. Thus we have:

**Corollary 1** *In the ergodic case  $\left(\frac{C(T)}{T} - C_\infty\right)$  is at least  $O(\exp(\lambda_{\min} t))$  where  $\lambda_{\min}$  is the dominant eigenvalue of the intensity matrix of the machine state Markov chain, and  $C_\infty$  is the steady-state average cost per unit time.*

We now give a complete treatment of the asymptotics of the linear cost functional for the two-state machine case. While for lack of space as well as simplicity, we use specific numerical values for the dynamic model, the analysis can be carried out in full generality (see [6]).

### 3 Asymptotic optimization of the two-state machine

We consider a sample example with two modes. The discrete system state evolves according to a Markov chain with intensity matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Furthermore let:  $\dot{u}_1 = 2$ ,  $\dot{u}_2 = 0$ ,  $d = 1$ .

Because only one state is feasible, hedging policies are characterized by a single hedging point denoted  $Z$ . Let  $\ell(x)$ , the cost per unit time be  $c^+ x$  if  $x > 0$  and  $c^- x$  if  $x < 0$ . Application of the integral equation (3), together with the first passage-time computation in (4) yields:

$$\begin{aligned} C^*(s) = & \frac{2s + 5 - \sqrt{1 + 4s(s+3)}}{2s^2(s+3)} \left[ \frac{2(c^+ + c^-)}{1 + \sqrt{1 + 4s(s+3)}} \right. \\ & \left. \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1 + 4s(s+3)}}{2} Z\right) + c^+ Z \right. \\ & \left. - \frac{1c^+}{1 + \sqrt{1 + 4s(s+3)}} \right] + \frac{c^+ Z}{s^2(s+3)} \frac{1 + \sqrt{1 + 4s(s+3)}}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

where it is assumed that at  $t = 0$ ,  $x(0) = Z$ , the machine is in state 1, and  $C^*(s)$  is the laplace transform of the cost functional.

The singularities of that Laplace transform are a mixture of poles at  $s_1 = s_2 = 0$ ,  $s_3 = -3$  and branching points due to the square root term

$\sqrt{1 + 4s(s+3)}$  at  $s_4 = -0.0857864$  and  $s_5 = -2.9142$  respectively. The asymptotic behavior of  $C(T)$  as  $T$  grows indefinitely can be obtained by considering the residues of the poles at zeros, as well as the most dominant branching point (i.e the closest to the  $j\omega$  axis). Following [5], we neglect any integer powers in the asymptotic expansion of  $C^*(s)$  around the branching point to obtain:

$$\begin{aligned} C^*(s) \approx & [0.6667(c^+ + c^-) \exp(-Z) + c^+ (Z - 0.6667)] \frac{1}{s^2} \\ & - [2.88889(c^+ + c^-) \exp(-Z) + 2(c^+ + c^-) Z \exp(-Z) - 2.8889c^+] \frac{1}{s} \\ & + [c^+ (135.882 Z - 225.137) + 225.17(c^+ + c^-) \exp(-\frac{Z}{2})] \\ & - [914.103(c^- + c^+) (1 + 0.414214 Z) \exp(-\frac{Z}{2}) - 914.103 \cdot c^+] \\ & \sqrt{s + 0.0857864} + 178.49 \left[ (-178.243(c^+ + c^-) \exp(-\frac{Z}{2}) + 178.243c^+) - \right. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & (78.9522 Z (c^+ + c^-) + 7.24264 Z^2 (c^+ + c^-) + Z^3 (c^+ + c^-)) \exp(-\frac{Z}{2}) \\ & (s + 0.0857864)^{\frac{1}{2}} + O[(s + 0.0857864)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

This in turn yields:

$$\begin{aligned} \frac{c(T)}{T} = & \{ 0.6667(c^+ + c^-) \exp(-Z) + c^+ (z - 0.6667) \} \\ & - [2.88889 (c^+ + c^-) \exp(-Z) + 2 (c^+ + c^-) Z \exp(-Z) - 2.8889c^+] \frac{1}{T} \\ & + \frac{\exp(-0.0857864 T)}{T} \left\{ c^+ (135.882 z - 225.137) + 225.17 (c^+ + c^-) \exp(-\frac{Z}{2}) \right. \\ & - [914.103 (c^- + c^+) (1 + 0.414214 Z) \exp(-\frac{Z}{2}) - 914.103] \frac{1}{\sqrt{\pi T}} \\ & + 178.49 \left[ \left( 178.243 (c^+ + c^-) \exp(-\frac{Z}{2}) - 178.243c^+ \right) \right. \\ & \left. + (78.9522 z (c^+ + c^-) + 7.24264 z^2 (c^+ + c^-) + Z^3 (c^+ + c^-)) \exp(-\frac{Z}{2}) \right] \\ & \left. \frac{1}{2\sqrt{\pi T^3}} + O[\frac{1}{\sqrt{\pi T^3}}] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Where in (7) the constant term coincides with the Bielecki-Kumar limit [2].

Using (7), for  $T > \frac{2}{0.085786} = 23.3137$ , we seek to optimize via a steepest descent algorithm the cost functional in (7). The results for the cost, and the optimal hedging point as a function of the length of the optimization horizon are shown in Fig.1 and 2 below. Also, note that we include a figure (Fig.3) illustrating the behavior of the closest branching point (from the  $jw$  axis) as the ratio  $r = \frac{d}{\pi_1 \hat{u}_1}$  is varied from 0.01 to 0.9, where  $\pi_1 \hat{u}_1$  is the average maximal production capacity. Recall that the position of this branching point governs the speed at which convergence to steady-state occurs.

## conclusion

We have extended the renewal theoretic framework of single part multiple state manufacturing systems under hedging policies first developed in [4]. This was used to asymptotically optimize hedging point policies over finite horizons for two-state systems. In future work, we will report on the theory for three state manufacturing systems.

## References

1. R. AKELLA and P. R. KUMAR. "Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing system". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31:pp.116-126, February 1986.
2. T. BIELECKI and P. R. KUMAR. "Optimality of Zero-inventory Policies for Unreliable Manufacturing systems". *Operat. Res.*, vol. 26:pp. 532-540, July-Aug. 1988.
3. J. B. KIMEMIA and S. B. GERSHWIN. "An Algorithm for the Computer Control of Production in Flexible Manufacturing Systems". *IIE Transactions*, vol. 15(no 4):pp. 353-362, Decembre 1983.

4. R. P. MALHAMÉ and E. K. BOUKAS. "A Renewal Theoretic Analysis of a Class of Manufacturing Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-36(no 5):pp. 353-362, May 1991.
5. B. VAN DER POL and H. BREMMER. "Operational Calculus Based on the Two Sided Laplace Integral". *The Sybdicts of the Cambrige University Press*, New York, 1964.
6. S. EL-FÉRIK and R. P. MALHAMÉ. "Optimizing the Transient Behavior of Hedging Control Policies in Failure Prone Manufacturing Systems". *to appear as a GERAD report*.
7. A. SHARIFNIA. "Production Control of Manufacturing System with Multiple Machine States". *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-33(no 7):pp. 620-625, July 1988.

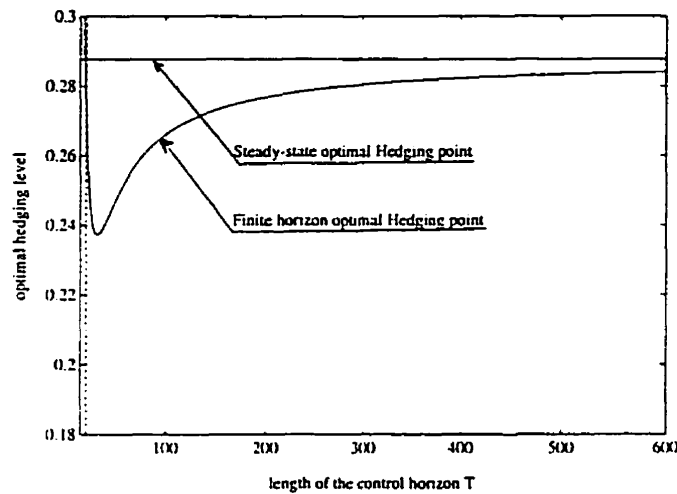


Fig. 1. Identification of the optimal Hedging Point level of the two-state machine case

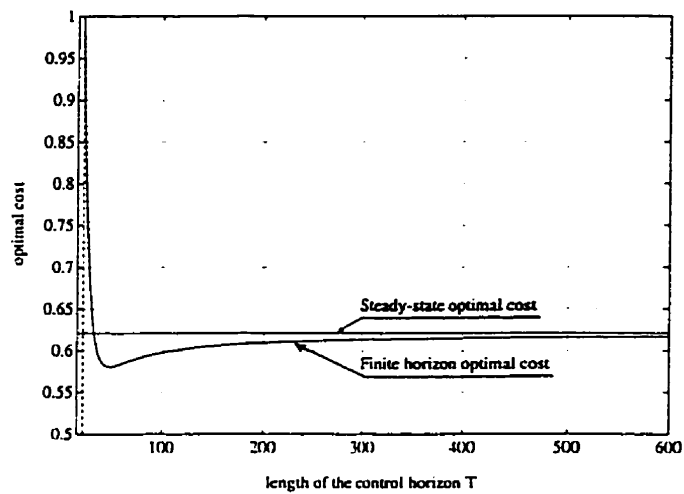


Fig.2. The optimal finite horizon average cost of the two-state machine case

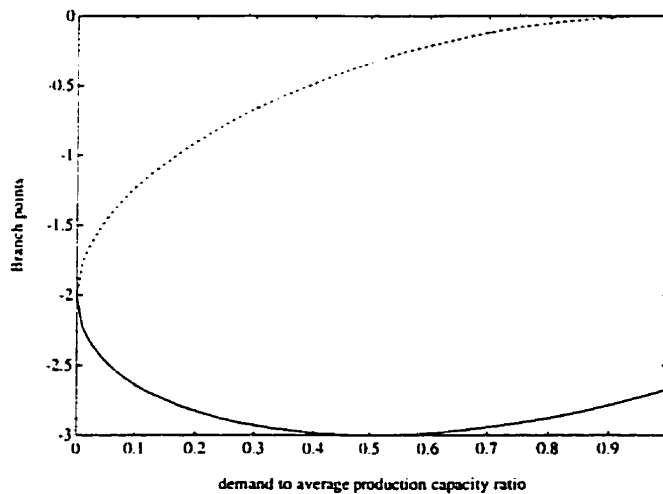


Fig.3. The behavior of the closest branching point (from the  $j\omega$  axis) as  $r = \frac{d}{\pi_1 \bar{a}_1}$  is varied

## CHAPITRE V

# POLITIQUES MAXIMALES SIMPLES À SEUILS CRITIQUES

Le problème de contrôle de flux est, en général, un problème multi-dimensionnel puisque, dans la majorité des cas, les ateliers de fabrication flexibles produisent plusieurs types de pièces. La détermination de la loi de production optimale est complexe. S'inspirant d'une idée présentée par Kimemia et Gershwin [7], Caramanis et Sharifnia [9] proposent une conception sous-optimale où les taux de production appartiennent à des hypercubes souscrits à l'espace de capacité. Cette décomposition de l'espace de production fait en sorte que le problème de contrôle de flux multi-dimensionnel se réduit à un ensemble de sous-problèmes scalaires (mono-pièce) complètement indépendants. Cette indépendance totale bien qu'intéressante au niveau de la réduction de complexité, fait en sorte que la capacité du système est sous-utilisée principalement quand le stock de l'une des pièces atteint son propre seuil critique et qu'une certaine capacité de production est ainsi libérée.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle classe de politiques de production dites politiques maximales simples à seuils critique. Cette classe est incluse à l'intérieur de la classe de politiques de production maximales. C'est à dire telles que la capacité de production disponible est utilisée en tout temps si nécessaire. L'objectif visé a été défini à travers la dernière question posée dans notre chapitre d'introduction:

- Comment améliorer le contrôleur sous-optimal de Caramanis et Sharifnia dans le cas d'un atelier de fabrication flexible produisant plusieurs types de pièces.

Ce chapitre représente donc notre deuxième contribution. L'article intitulé "A Tractable Class of Maximal Hedging Policies in Multi-Part Manufacturing Systems"

mis en annexe constitue le corps de ce chapitre.

### 5.1 Formulation du problème

Nous considérons une version restreinte du problème 2.2. Le système sur lequel on met l'emphasis est un système à *deux* modes produisant *plusieurs* types de pièces. Soit  $u_\alpha(t) = [u_{\alpha 1}(t), u_{\alpha 2}(t), \dots, u_{\alpha p}(t)]^t$  le vecteur des taux de production quand le système est au mode  $\alpha$ . Soit  $\alpha(t) = 1$  le mode opérationnel, et  $\alpha(t) = 0$  le mode de panne. La capacité de production dans le mode de panne est supposée constante  $u_{0j}(t) < d_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , prise sans perte de généralité égale à zéro.  $u_1(t)$  appartient à un espace convexe défini par les contraintes linéaires suivantes:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \tau_i u_{1i} \leq 1 \\ 0 \leq u_{1i} \leq u_{1i \max} \quad i \in B, \quad B = \{1, \dots, p\}, \end{cases} \quad (5.1)$$

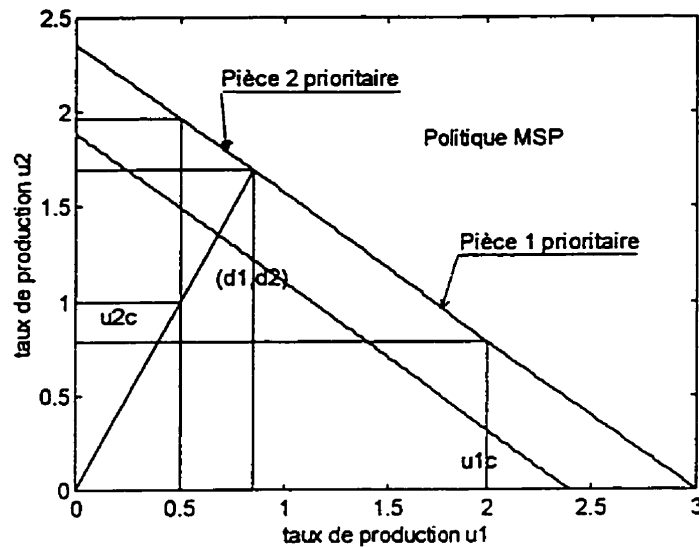
où  $u_{1i \max} = \frac{1}{\tau_i} > d$  représente la capacité de production maximale quand toute la capacité disponible est allouée à la production de la pièce  $i$ ,  $i \in B$ . Soit  $\partial\Omega_1 = \left\{ (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1p}) \mid \sum_i \tau_i u_{1i} = 1 \right\}$ , la frontière supérieure de  $\Omega_1$ . Nous nous contenterons de rechercher une politique de production optimale à l'intérieur de la classe des politiques de production maximales simples à points critiques (politiques MSP). Cette classe de politiques est incluse dans la classe générale des politiques maximales, et ces éléments sont construits comme:

- étape 1: choisir un point critique arbitraire  $z = [z_1, z_2, \dots, z_p]^t$ ,
- étape 2: choisir un point particulier  $c$  appartenant à  $\partial\Omega_1$ , avec les composantes  $u_{11}^c, u_{12}^c, \dots, u_{1p}^c$ , correspondant aux taux de productions des pièces  $i \in B$ , respectivement.  $c$  et  $u_1^c$  sont appelés le point *nominal* de production et le vecteur nominal des taux de production de la politique MSP, respectivement.
- étape 3: définir un ordre de priorité des pièces qui génère une politique MSP consistante pour un choix particulier de  $c$ . Une politique MSP consistante



est une politique avec un ordre de priorité des pièces et un vecteur de production nominal tels qu'un processus d'inventaire de pièces ne peut atteindre son niveau critique que si tous les stocks associés aux pièces de priorités plus élevées sont soit déjà à leurs points critiques ou atteignent leurs points critiques au même moment. Dans la proposition suivante, nous établissons que pour un vecteur de production nominal donné il existe toujours une attribution des niveaux de priorité garantissant que la politique correspondante est consistante. Avec cette attribution de priorité et en supposant que les pièces sont réindexées de manière à ce que la priorité décroît avec un indice croissant, la politique de production MSP résultante est la suivante: pour  $\alpha(t) = 0$ , tous les niveaux de stock de pièces de type  $j \in B$ , décroissent respectivement à des taux  $u_{0j} - d_j$ . Quand  $\alpha(t) = 1$ , si  $x_i(t) \neq z_i$ , la production procède selon le vecteur de production nominal. Quand  $\alpha(t) = 1$ , et  $x_i(t) = z_i$  pour  $i = 1, \dots, i_M$ ,  $i_M \leq p$ , la vitesse de production est fixée à  $d_i$  pour toutes les pièces  $i = 1, \dots, i_M$ , tandis que pour les pièces  $i = i_{M+2}, \dots, p$ , la production demeure aux taux nominaux. Cependant, et en accord avec le caractère 'maximal' de la politique, toute la capacité de production ainsi libérée est attribuée à la pièce  $i_{M+1}$ , i.e., le type de pièce avec la priorité la plus élevée et ayant un inventaire encore déficient. Ainsi, cette situation perdure jusqu'à ce que  $x_1(t)$  quitte  $z_1$  (aussitôt que  $\alpha(t)$  saute du mode 1 au mode 0), après quoi les composantes du processus d'inventaire global,  $x_j(t)$ , décroissent à des taux  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , respectivement. Quand l'atelier de fabrication revient de nouveau au mode 1 la production reprend avec les mêmes règles que précédemment.

Il est clair que la performance globale d'une politique MSP donnée dépend du choix spécifique de  $z$  et de  $c$ , choix qui ont besoins d'être optimisés. Notons que cette classe de politiques préserve la notion de seuils critiques d'inventaire comme garantie vis-à-vis les pannes de machines. Les performances d'une politique MSP en général meilleures que celles données par les politiques sous optimales proposées par Caramanis et Sharifnia [9], puisque pour le même choix  $c \in \partial\Omega_1$ , la capacité



**Figure 5.1:** Application de la politique MSP dans le cas d'un système à deux modes produisant deux types de pièces

de la machine est exploitée au maximum dans le cas des politiques MSP. De plus, il s'avère que le critère d'ergodicité des politiques MSP est le même que pour n'importe quelle politique maximale et correspond à l'appartenance du vecteur demande au polyèdre de capacité de production moyen. Contrairement, à la technique proposée par Caramanis et Sharifnia [9] où une grande portion de l'espace est exclue afin de satisfaire le critère d'ergodicité, tout l'espace de production peut être exploité dans le cas des politiques MSP. la figure (5.1) illustre l'attribution de priorités pour des politiques MSP consistantes dans le cas d'un système produisant deux types de pièces.

## 5.2 Existence et caractérisation des politiques maximales simples consistantes

### 5.2.1 Politiques maximales consistantes

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, les politiques MSP requièrent un ordre de priorité des pièces caractérisant la manière avec laquelle une capacité de production supplémentaire libérée lorsqu'un des processus d'inventaire associé à un type de pièce donné atteint son niveau critique est affectée pour accélérer la croissance des stocks déficients des autres pièces. Rappelons qu'un schéma de priorité consistant pour une politique MSP est défini comme étant celui où l'inventaire d'un type de pièce donné atteint son niveau critique associé, seulement si toutes les pièces de priorité supérieures soit sont déjà à leurs seuils critiques ou atteignent leurs niveaux critiques correspondant au même moment. La proposition suivante décrit le schéma de priorité qui résulte en une politique MSP consistante. Soit  $\Gamma_{ij}$  les ensembles définis comme suit:

$$\Gamma_{ij} = \left\{ c' \in \partial\Omega_1 : \frac{u_j^{c'}}{u_i^{c'}} \leq \frac{d_j}{d_i} \right\} \quad i, j \in B; j \neq i$$

Nous avons la proposition suivante:

**Proposition 5.2.1** *Étant donné un atelier de fabrication flexible multi-pièce, soit  $c \in \partial\Omega_1$  et  $z$  définis respectivement comme étant le vecteur de production nominal et le point critique visé d'une politique MSP dont nous n'avons pas encore défini la structure de priorité. Soit  $D_i(c) = \{j \in B \mid c \in \Gamma_{ij}\}$ ,  $i \in B$ . L'une des situations suivantes peut se présenter:*

- (a) *aucune paire  $i, j \in B$ ,  $i \neq j$ , n'est telle que  $i \in D_j(c)$  et  $i \in D_i(c)$ . Alors un ordre de priorité attribuant à la pièce  $i$ ,  $i \in B$ , une priorité plus élevée que toutes les autres pièces avec un indice appartenant à  $D_i(c)$  résulte en une politique de production MSP consistante;*
- (b) *pour une paire  $i, j \in B$ ,  $i \neq j$ ,  $\frac{u_j^c}{u_i^c} = \frac{d_j}{d_i}$ , nous avons  $i \in D_j$  et  $j \in D_i$ . Comme première étape on utilise l'algorithme de priorité présenté en*

(a) avec la indices  $i, j$ , ayant le même rang de priorité. Suite à cela, une attribution arbitraire quelconque de priorité entre indices de même rang résultera en une politique de production MSP consistante

### 5.2.2 Caractérisation de la politique de production

En supposant un réajustement des indices tel que l'indice croît lorsque la priorité décroît, les lois de production de la politique MSP résultante sont formellement décrites comme suit:

$$u_{\alpha 1} = \begin{cases} u_{11}^c & \text{si } x_1 < z_1; \alpha(t) = 1, \\ d_1 & \text{si } x_1 = z_1; \alpha(t) = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha(t) = 0, \end{cases}$$

$$u_{\alpha 2} = \begin{cases} u_{12}^c & \text{si } x_1 \neq z_1; x_2 < z_2; \alpha(t) = 1, \\ \tilde{u}_{12}^c & \text{si } x_1 = z_1; x_2 < z_2; \alpha(t) = 1, \\ d_2 & \text{si } x_1 = z_1; x_2 = z_2; \alpha(t) = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha(t) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

et en général pour la pièce  $i, i \geq 2$  :

$$u_{\alpha i} = \begin{cases} u_{1i}^c & \text{si } x_{i-1} \neq z_{i-1}; x_i < z_i; \alpha(t) = 1, \\ \tilde{u}_{1i}^c & \text{si } x_{i-1} = z_{i-1}; x_i < z_i; \alpha(t) = 1, \\ d_i & \text{si } x_{i-1} = z_{i-1}; x_i = z_i; \alpha(t) = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha(t) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $\tilde{u}_{1i}^c, i = 2, \dots, p$ , est obtenu de l'équation récursive suivante

$$\tilde{u}_{1i+1}^c = u_{1i+1}^c + \frac{\tau_i (\tilde{u}_{1i}^c - d_i)}{\tau_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (5.4)$$

avec  $\tilde{u}_{11}^c = u_{11}^c$ .

### 5.2.3 Cas générique: machine maître et machine esclave

La dynamique du processus d'inventaire de la pièce de type 1 évolue indépendamment des autres pièces comme si elle était produite par une machine markovienne produisant un seul type de pièce et ayant comme espace de capacité de production l'intervalle  $[0, u_{11}^c]$  quand  $\alpha = 1$ , et zéro dans le cas contraire.

Soit  $T_i$  l'intervalle de temps entre l'instant où le surplus de la pièce  $i$  quitte l'état hybride  $(z_i, 1)$  et l'instant où ce surplus revient pour la première fois à  $(z_i, 1)$ ,  $i \in B$ . Définissons  $v_{1j}$  comme la vitesse de croissance du stock de la pièce de type  $j$ ,  $j \in B$ , quand le système est dans le mode  $\alpha = 1$ . Quand  $\alpha = 0$ , le stock de chaque pièce décroît au taux  $d_j$ ,  $j \in B$ , respectivement. Cependant quand  $\alpha = 1$ , si  $x_1(t) \neq z_1$ , alors  $x_1(t)$  croît à une vitesse  $v_{11} = u_{11}^c - d_1$  et  $x_j(t)$  croît à une vitesse  $v_{1j} = u_{1j}^c - d_j$ ,  $j = 2, \dots, p$ . Notons par  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$  la situation quand  $\alpha(t) = 1$  et  $x_1(t) = z_1$ , et par  $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$  toute autre situation non conforme. De la proposition 5.2.1, nous savons que  $x_1(t)$  va atteindre la frontière  $z_1$  avant que  $x_j(t)$  n'atteigne  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . À ce stade,  $x_2(t)$  voit sa vitesse changer et croît à ce moment à une vitesse différente  $\tilde{v}_2^1 = \tilde{u}_{12}^c - d_2$ , où  $\tilde{u}_{12}^c$  est défini par l'équation (5.3, pour  $i = 2$ ). Notons que pendant que  $x_1(t)$  possède une dynamique markovienne entièrement indépendante de  $x_2(t)$ , ceci n'est pas le cas pour  $x_2(t)$ . Ainsi, la pièce moins prioritaire de type 2 peut être vue comme si elle était produite par une machine mono-pièce, semi-markovienne à deux modes ( $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$  et  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$ ) avec un état opérationnel qui suit une loi exponentielle (quand  $x_1(t) = z_1$ ) et un état de panne associé à un temps de séjour correspondant à la variable aléatoire représentant un premier temps de retour (premier retour de  $x_1(t)$  à  $z_1$ ).

L'approche pour analyser le coût associé à la machine semi-markovienne se compose de deux étapes. Durant la première étape la variable aléatoire du premier temps de retour est markovianisée en utilisant les approximations de Padé pour des machines markovienne multi-mode. Ensuite, en lui associant une constante choisie équivalente à la vitesse de décroissance du stock durant le temps de panne markovianisé et en gardant le taux de variations inchangé quand  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$ , une version markovienne *biaisée*  $(\tilde{x}_2(t), \tilde{\alpha}_{M2}(t))$  de  $(x_2(t), \tilde{\alpha}_2(t))$  est obtenue. Cette version biaisée est telle que  $\tilde{x}_2(t) \equiv x_2(t)$  chaque fois  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$  (i.e., quand  $x_1(t) = z_1$ ), et  $\tilde{x}_2(t) > x_2(t)$  dans le cas contraire. Les fonctions de densité de probabilité stationnaire pour cette machine markovienne multi-mode et produisant un seul type de produit peuvent être obtenues en utilisant la même approche que Sharifnia [25] (équations différentielles couplées).

La deuxième étape consiste à reconnaître que la variable aléatoire représentant le biais  $\varepsilon_2(t) \equiv \tilde{x}_2(t) - x_2(t)$  se comporte quand  $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$  comme une déviation (caractérisable analytiquement) de la dynamique du stock durant le premier retour de  $\varepsilon_2(t)$  (Le processus de stock d'une machine markovienne à deux états) à zéro (point critique), et à appliquer subséquemment une correction (convolution) pour éliminer le biais.

En réalité la même procédure peut être appliquée quand nous passons de la  $i^{\text{ème}}$  machine semi-markovienne pour le type de pièce  $i$  ( $\tilde{\alpha}_i(t) = 0$  si  $x_{i-1}(t) \neq z_{i-1}$ ,  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  si  $x_{i-1}(t) = z_{i-1}$ ) à la  $(i+1)^{\text{ème}}$  machine semi-markovienne ( $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 0$  si  $x_i(t) \neq z_i$ ,  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$  si  $x_i(t) = z_i$ ) pour la pièce de priorité immédiatement inférieure  $i+1$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ . Par conséquent, excepté pour  $i = 1$  où la machine est markovienne, chaque machine produisant la pièce  $i$ ,  $i \geq 2$ , est semi-markovienne à deux modes (0, 1) caractérisés par le processus semi-markovien  $\tilde{\alpha}_i(t)$ . L'état opérationnel suit une loi exponentielle et l'état de panne est associé à une variable de premier temps de retour (premier retour de  $x_{i-1}(t)$  à  $z_{i-1}$ ).

Il s'ensuit que l'analyse d'un problème générique à deux machines  $i$ ,  $i+1$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ , produisant les pièces  $i$  et  $i+1$  avec une priorité décroissante, respectivement appelée machine maître et machine esclave peut constituer une étape très utile pour la détermination des performances d'une politique MSP donnée. Cet analyse fait l'objet de la prochaine section où nous allons illustrer la construction des processus biaisés ainsi que la procédure d'évaluation de la contribution au coût de la pièce produite par la machine esclave sous une politique MSP.

### 5.3 Approximation du processus d'inventaire de pièces pour la machine esclave

#### 5.3.1 Construction de la version biaisée du processus

Supposons qu'il existe un processus semi-markovien noté  $(\tilde{\alpha}_i(t), \tilde{x}_i(t))$  et appelé version biaisée de  $(\tilde{\alpha}_i(t), x_i(t))$  pour un  $i$  donné,  $i = 1, \dots, p-1$ .  $\tilde{x}_i(t)$  est un processus

à deux vitesses (une vitesse positive  $\tilde{v}_{1i}$  quand  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  (avec  $\tilde{v}_{11} = v_{11}$ ) et une vitesse négative  $-\tilde{d}_i$  (avec  $\tilde{d}_1 = d_1$ )), pour un  $i = 1, \dots, p-1$ , et tel que  $\forall t \geq 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_i(t) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{d}_i = d_i, \quad \tilde{x}_i(t) = x_i(t) \\ \text{ou} \\ \tilde{d}_i < d_i, \quad \tilde{x}_i(t) > x_i(t), \text{ aussi longtemps que} \\ \quad \tilde{\alpha}_i(t^-) \neq 1 \text{ et } \tilde{\alpha}_i(t^+) \neq 1 \end{array} \right. \\ \tilde{\alpha}_i(t) = 1 \Rightarrow \tilde{x}_i(t) = x_i(t) \end{array} \right.$$

Le lemme suivant établit l'existence d'une version biaisée semi-markovienne de  $(\tilde{\alpha}_{i+1}(t), \tilde{x}_{i+1}(t))$ .

**Lemme 5.1** *Pour la pièce immédiatement moins prioritaire,  $i+1$ , une version biaisée  $(\tilde{\alpha}_{i+1}(t), \tilde{x}_{i+1}(t))$  de  $(\alpha_{i+1}(t), x_{i+1}(t))$  existe, où  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$  si  $x_i(t) = z_i$  et  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 0$  sinon.  $\tilde{x}_{i+1}(t)$  est un processus à deux vitesses avec une vitesse positive  $\tilde{v}_{1i+1}$ , et une vitesse négative*

$$\tilde{d}_{i+1} \leq d_{i+1}, \quad (5.5)$$

donnée par

$$\tilde{d}_{i+1} = \frac{\tilde{v}_{1i}}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i} d_{F_{i+1}} - \frac{v_{1i+1} \tilde{d}_i}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i}, \quad (5.6)$$

où le taux  $d_{F_{i+1}}$  peut être exprimé comme suit:

$$d_{F_{i+1}} = \frac{v_{1i} + \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i} d_{i+1} - \frac{d_i - \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i} v_{1i+1}.$$

De plus:

$$\begin{aligned} \text{si } \tilde{d}_{i+1} = d_{i+1} \quad \tilde{x}_{i+1}(t) &= x_{i+1}(t) \quad \text{tandis que} \\ \text{si } \tilde{d}_{i+1} < d_{i+1} \quad \tilde{x}_{i+1}(t) &= x_{i+1}(t) \quad \text{quand } \tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1, \text{ et} \\ &\tilde{x}_{i+1}(t) > x_{i+1}(t) \quad \text{tant que } \tilde{\alpha}_{i+1}(t^-) \neq 1 \text{ et } \tilde{\alpha}_{i+1}(t^+) \neq 1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le corollaire suivant est une conséquence de l'équation (5.7)

**Corollaire 5.1** *soit  $\varepsilon_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t)$ , le biais entre  $\tilde{x}_i(t)$  et  $x_i(t)$ . Si  $\tilde{d}_i < d_i$ , pour  $t_\ell < t < t_\ell + T_{r_i}$ ,  $t_\ell$  étant l'instant où  $x_i(t)$  vient juste de quitter  $z_i$ ,  $\varepsilon_i(t) \neq 0$*

et évolue selon l'équation dynamique suivante:

$$\frac{d\varepsilon_i(t)}{dt} = \begin{cases} -v_{1i} - \tilde{d}_i & \text{if } \alpha(t) = 1, \\ d_i - \tilde{d}_i & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5.8)$$

Par conséquent sous une politique MSP, le problème original multi-pièce de contrôle de flux avec  $p$  types de pièces peut être réduit à  $p$  sous-problèmes mono-pièce que nous savons traiter. Le premier problème associé à la pièce 1 peut être résolu facilement puisqu'il s'agit d'une machine markovienne produisant un seul type de pièce. Sa solution est exactement celle donnée par Bielecki et Kumar [27]. Cependant pour  $i \geq 2$ , nous calculons par l'approche de Sharifnia [25] les densités de probabilités stationnaires associées à la version biaisée après markovianisation  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_{Mi}(t)]^t; \tilde{f}_{Mk}(\tilde{x}_i)$ ,  $k = 1, \dots, q_i + 1$ , où  $q_i$  est l'ordre de la markovianisation. Notons que par construction,  $k = 1$  correspond à  $\tilde{\alpha}_{Mi}(t) = 1$  et  $k = 2, \dots, q_i + 1$  correspondent à  $\tilde{\alpha}_{Mi}(t) = 0$ . D'où  $\tilde{f}_1(\tilde{x}_i) = \tilde{f}_{M1}(\tilde{x}_i)$ , et  $\tilde{f}_0(\tilde{x}_i) = \sum_{k=2}^{q_i+1} \tilde{f}_{Mk}(\tilde{x}_i)$ . La quantité encore inconnue à ce stade est  $f_0(x_i)$  puisque  $f_1(x_i) = \tilde{f}_1(\tilde{x}_i)$ . Elle est donnée par le lemme suivant:

**Lemme 5.2 :** Soit  $\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i)$  la fonction de densité de probabilité du biais  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i \in B$ . Sous la condition d'ergodicité ( $d \in E[\Omega_1]$ ),  $f_0(x_i)$  est obtenue par l'intégrale de convolution suivant:

$$f_0(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{f}_0(x_i - \varepsilon_i) \tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) d\varepsilon_i. \quad (5.9)$$

où  $\tilde{f}_0(x_i - \varepsilon_i) = \sum_{l=2}^{q_i+1} \tilde{f}_{Ml}(x_i - \varepsilon_i)$  et

$$\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = \beta \exp(-\beta \varepsilon_i),$$

avec

$$\beta = \left[ \frac{v_i^1 + d_i}{v_i^1 + \tilde{d}_i} \right] \frac{1}{(d_i - \tilde{d}_i) E[T_{r_{i-1}}]}, \quad (5.10)$$

$$E[T_{r_{i-1}}] = \frac{\tilde{v}_{i-1}^1 + \tilde{d}_{i-1}}{\frac{\tilde{v}_{i-1}^1}{E[T_{r_{i-2}}]} - \lambda_1 \tilde{d}_{i-1}}, \quad i = 3, \dots, p+1. \quad (5.11)$$



et

$$E [T_{r_1}] = \frac{v_1^1 + d_1}{\lambda_0 v_1^1 - \lambda_1 d_1} \quad (5.12)$$

À présent, nous pouvons estimer la contribution dans la valeur du coût associée à la pièce  $i$  par intégration de la fonction  $\ell(x)$  par rapport aux densités de probabilité stationnaires.

L'analyse précédente étant fondée entre autres sur l'hypothèse que le système contrôlé était ergodique. Dans la section suivante nous montrons que les politiques MSP consistantes sont ergodiques si  $d \in E [\Omega_1]$ .

#### 5.4 Critère d'ergodicité pour le cas multi-pièces

Dans leur récent travail Srivatsan et Dallery [11] prouvent que si la capacité du système est toujours utilisée au maximum (sans perte de temps) tant qu'une pièce est loin de son point critique, alors toutes les politiques décrites par un vecteur nominal  $c \in \partial\Omega_1$  génèrent des trajectoires qui atteignent leurs seuils critiques en même temps. Par conséquent, en se concentrant sur les instants de premiers retours au point critique  $z$  et de premier départ de  $z$ , nous pouvons construire un processus de renouvellement alterné. Ce processus va être ergodique si les retours se réalisent avec probabilité un et la moyenne des temps de retour est finie [32]. Soit  $c_0^*$  un point de  $\partial\Omega_1$  tel que  $\frac{u_i^{c_0^*}}{u_j^{c_0^*}} = \frac{d_i}{d_j}$ ,  $\forall i, j \in B$ . Alors les politiques MSP vont être ergodiques si la politique MSP basée sur le choix de  $c_0^*$  est ergodique. Sachant que pour une politique MSP basée sur  $c_0^*$ , toutes les pièces possèdent les mêmes priorités et atteignent leur seuil critique respectif en même temps (proposition 5.2.1), il est suffisant que la pièce 1 ait un temps de retour à  $z_1$  fini. Ceci est équivalent à exiger que (voir Malhamé [10], Bielecki et Kumar [27]):

$$\pi_1 u_1^{c_0^*} > d_1, \quad (5.13)$$

Ce qui nous permet d'arriver à la proposition suivante:

**Proposition 5.4.1** *Pour le cas des systèmes multi-pièce, La classe de politiques MSP est ergodique si le vecteur de demande  $[d_1, d_2, \dots, d_p] \in E[\Omega_1]$ .*

Nous avons vu au deuxième chapitre que le cas idéal recherché lors du contrôle de flux c'est de produire sur demande et garder le niveau de stock global égal à zéro (production just-in-time). Dans la section suivante nous allons présenter les conditions nécessaires et des conditions suffisantes respectivement pour que le 'just-in-time' soit la politique optimale.

### 5.5 Conditions d'optimalité du niveau d'inventaire nul (just-in-time)

Dans [13] des conditions nécessaires et suffisantes sont données afin d'établir l'optimalité du niveau d'inventaire nul pour une machine non markovienne ergodique à deux modes et produisant un seul type de pièce. Le coût instantané est donné par  $\ell(x) = c^+ \max(x, 0) + c^- \max(-x, 0)$ . Brémaud et al. [13] démontrent en utilisant les estimés de la première dérivée du coût stationnaire par rapport au point critique que le niveau d'inventaire nul est optimal si et seulement si (voir Brémaud, Malhamé et Massoulié [13], théorème 2)

$$\frac{c^-}{c^+ + c^-} \leq P[x = 0] = \frac{\pi_1(u_1 - d_1) - \pi_0 d_1}{(u_1 - d_1)} \quad (5.14)$$

où  $\pi_i, i = 0, 1$ , est la probabilité stationnaire d'être au mode  $i$ .

D'un autre part, pour le cas des systèmes produisant  $p$  types de pièces, nous avons montré précédemment que sous une politique MSP le problème de contrôle de flux original est équivalent à  $p$  sous-problèmes indépendants.

Cependant pour le cas des systèmes multi-pièces, l'application du critère (5.14) sur une base individuelle donne seulement des conditions nécessaires d'optimalité globale de l'inventaire nul  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p] = 0$ . Ainsi le processus semi-markovien caractérisé par  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_i(t)]^t$  admet un niveau d'inventaire optimal nul si et seulement si

$$\frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-} \leq P[\tilde{x}_i = z_i] = P[x_i = z_i]. \quad (5.15)$$

avec la probabilité  $P[x_i = z_i]$  donnée par:

$$P[x_i = z_i] = \frac{\pi_{1i}(\tilde{u}_{1i}^c - d_i) - \pi_{0i}\tilde{d}_i}{(\tilde{u}_{1i}^c - d_i)}, \quad (5.16)$$

$$i = 2, \dots, p,$$

où  $\pi_{1i}$  et  $\pi_{0i} = 1 - \pi_{1i}$  représente la distribution de probabilité stationnaire de  $\tilde{\alpha}_i(t)$ .

De plus:

$$P[\tilde{\alpha}_i(t) = 1] = \pi_{1i} = \frac{1}{1 + \lambda_1 E[T_{r_{i-1}}]}. \quad (5.17)$$

où  $T_{r_{i-1}}$  représente la variable aléatoire du premier temps de retour de  $x_{i-1}(t)$  à son niveau critique.  $E[T_{r_{i-1}}]$  peut être calculée de différentes manières; soit en utilisant des résultats connus sur les files M/GI/1 (voir Kleinrock ou Srivatsan et Dallery [11], corollaire 3), ou alternativement en calculant l'espérance de la variable aléatoire du premier temps de retour du processus markovien représentant le biais  $\varepsilon_i(t)$  à zéro en utilisant les techniques présentées au chapitre précédent. Ceci donne:

$$E[T_{r_{i-1}}] = \frac{u_{1i}^c}{\lambda_0(u_{1i}^c - d_i + \tilde{d}_i) - \lambda_1(d_i - \tilde{d}_i)}. \quad (5.18)$$

$$i = 2, \dots, p.$$

pour  $i = 1$ ,

$$P[x_1 = z_1] = \frac{\pi_{11}u_{11}^c - d_1}{(u_{11}^c - d_1)} \quad (5.19)$$

où  $\pi_{11} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}$ , (puisque  $\alpha(t)$  est un processus markovien). La proposition ci-dessous découle facilement de (5.15)

**Proposition 5.5.1** *Une condition nécessaire pour que l'optimalité globale du niveau critique  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p] = 0$ , sous la classe des politiques MSP consistantes est qu'il existe un vecteur nominal  $c \in \partial\Omega_1$  tel que:*

$$\frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-} \leq P[x_i = z_i] \quad (5.20)$$

$$i = 1, \dots, p,$$

De plus, sachant que par construction  $P[x_1 = z_1] \geq P[x_2 = z_2] \geq \dots \geq P[x_p = z_p]$ , nous avons la condition suffisante suivante

**Proposition 5.5.2** *Une condition suffisante pour l'optimalité globale du niveau critique  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p] = 0$ , sous la classe des politiques MSP consistant est que*

$$P[x_1 = z_1] = \frac{\pi_{11}u_{11}^{c_0} - d_1}{(u_{11}^{c_0} - d_1)} \geq \max_{i=1, \dots, p} \left\{ \frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-} \right\}$$

*En particulier, le point critique pour la pièce  $i$  est nul si*

$$P[x_p = z_p] = \frac{\pi_{11}u_{11}^{c_0} - d_1}{(u_{11}^{c_0} - d_1)} \geq \frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-}. \quad (5.21)$$

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de contrôle de flux d'un atelier de fabrication flexible à deux états et produisant plusieurs types de pièces. Nous avons défini une nouvelle classe de politiques à seuils critiques appelée politiques maximales simples à points critiques (politiques MSP). Tout comme les politiques caractérisées par des hypercubes souscrits proposées par Caramanis et Sharifnia [9], ces politiques sont fonctions du seuil critique le long de chaque composante ainsi que le choix du point  $c$  à la frontière supérieure de  $\Omega_1$ . Ces politiques de production peuvent avoir des performances meilleures que celles des politiques caractérisées par des hypercubes. Ceci est dû au fait que la production est toujours menée en exploitant la capacité maximale du système. En utilisant l'analyse de premier temps de passage, ainsi que les approximations de Padé, nous avons montré comment une analyse séquentielle des performances des politiques MSP est possible en commençant par la pièce ayant la priorité la plus élevée jusqu'à celle ayant la priorité la plus faible. Finalement, nous avons également établi que le critère d'ergodicité pour le cas multi-pièce est minimal, i.e., le taux de demande des pièces se trouve à l'intérieur de l'espace de capacité moyen. Nous avons aussi développé des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'optimalité du point critique global nul. Malheureusement l'analyse telle que présentée ne peut être appliquée qu'à un système à deux modes seulement produisant plusieurs types de pièces.

## ANNEXE IV

### A Tractable Class of Maximal Hedging Policies in Multi-Part Manufacturing Systems

Sami El-Férik<sup>1</sup>, Roland P. Malhamé<sup>2</sup>, and El-Kébir Boukas<sup>3</sup>

#### Abstract

The flow control problem in multi-part failure prone manufacturing systems is considered. The near optimal controllers of Caramanis and Sharifnia, while computationally attractive, suffer from the drawback that the production capacity set must be approximated via a very restricted set of inscribed hypercubes, namely those for which a componentwise feasibility requirement is satisfied. Also, due to the completely decoupled nature of production along each component, utilization of the restricted capacity set is suboptimal. A class of capacity set inscribed hypercube policies called simple maximal hedging (SMH) policies is introduced. In SMH policies production along the various components of the capacity set are coupled, the componentwise feasibility requirement is lifted, and there is no underutilization of production capacity if needed. In a  $p$  part types manufacturing system, for partwise additive cost functionals, it is shown that performance evaluation of a given SMH policy reduces to the analysis of  $p$  decoupled (fictitious) semi-Markovian machines. The machines are Markovianized via first passage-time analysis and a Padé approximants technique. Numerical optimization over the class of SMH policies in a sample manufacturing system indicate that their performance can come close to that of the optimal control.

# 1 Introduction

The problem of flow control is an important phase in a hierarchically structured scheme for the control of manufacturing systems (Gershwin 1994). In practice, it is a multi-dimensional problem since flexible manufacturing systems are generally expected to produce different part-types. Such systems are subject to random discrete events such as machine failures and repairs, jumps in the nature and level of the demand, operator and materials absence, etc. Consequently, the production capacity of the system relative to the demand changes randomly. The flow control problem is one of determining the short term individual average part production rates so as to minimize the expected inventory and backlog costs of the manufacturing system in the face of existing uncertainty. Starting with the work of Olsder and Suri (1980), a common paradigm for the analysis of this control problem has been a fluid model which is a highly aggregated representation of the manufacturing system. The model characterizes parts production and its dynamics is punctuated by random jumps either in the production capacity (due to machine failures or repairs), or in the demand for parts (Sethi and Zhang 1994).

Define

- $E\{.\}$  : the expectation operator;
- $x_i(t)$  : the production surplus/backlog for the part type  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Let  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)]^t$
- $\ell(x)$  : the cost per unit time, an additive convex function in the elements of  $x$ ; for instance  $\ell(x) = \sum_{i=1}^p [c_i^+ \max(x_i, 0) + c_i^- \max(-x_i, 0)]$ ;
- $u_{\alpha i}(t)$  : the production rate for part type  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , when the flexible manufacturing system is in mode  $\alpha$ .  
Let  $u_{\alpha}(t) = [u_{\alpha 1}(t), u_{\alpha 2}(t), \dots, u_{\alpha p}(t)]^t$
- $\alpha(t)$  : the state of a finite irreducible  $N$  state Markov chain with known intensity matrix  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ , ( $\lambda_{ii} = -\sum_j \lambda_{ij}$ ,  $\lambda_{ij} \geq 0$ ). It represents the operating and failure modes of the manufacturing system;

$\Omega_\alpha$  : The set of feasible production rates when the machine state is  $\alpha(t)$ . If the machines are perfectly flexible, then the  $\Omega_\alpha$  sets are convex polyhedra;

$d_i$  : the demand rate for the part type  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

Let  $d = [d_1, d_2, \dots, d_p]^t$

Then, in mathematical terms the infinite horizon average cost flow control problem can be described as follows (Caramanis and Sharifnia 1991):

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J &= \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \ell(x) dt \right\}, \\ \text{subject to} & \dot{x}(t) = u(t) - d, \quad \text{with } x(0) = x_0 \\ & u(t) \in \Omega_\alpha(t), \end{cases} \quad (1)$$

Caramanis and Sharifnia (1991) describe an approximation method that reduces the multi-part types flow control problem to many decoupled single-part type flow control problems. They use an orthogonal partitioning of the production space into regions where production capacity for any single part is comprised between 0 and a maximum rate irrespective of the production levels for other parts. This is equivalent to replacing the  $\Omega_\alpha$  sets with inscribed hypercubes. However, given that the inscribed hypercube approximation is aimed at making production along separate coordinates in the production space independent, a specific choice  $c$  of a boundary point of  $\Omega_\alpha$  is permissible only if feasibility constraints ( $E[u_{\alpha i \max}^c] > d_i$ ) are satisfied for all part types  $i = 1, \dots, p$ , where  $u_{\alpha i \max}^c$  is the maximum production rate of part  $i$  in mode  $\alpha$  and for the given choice of  $c \in \Omega_\alpha$ . Thus, while this near optimal controller presents many computational and conceptual assets, it suffers from an important limitation, namely the strong componentwise feasibility requirement imposed in the choice of the hypercubes. In fact, the allowed capacity set is then a restricted subset of  $\Omega_\alpha$  as shown in Figure 1 (for a two part-types system).

Furthermore, the complete decoupling of part production along separate coordinates, causes loss of possibly available capacity, essentially when at least one of the part-types has reached its own hedging level.

In order to overcome the above limitations, we propose a modification of the control policies aimed at reintroducing a measure of coupling between separate coordinates.

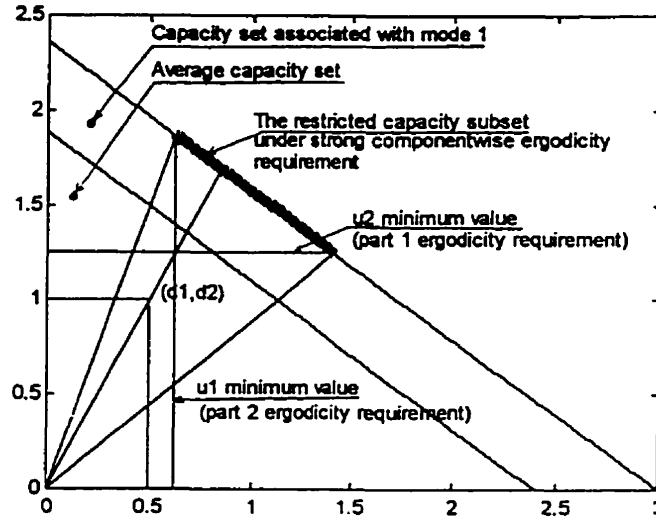


Figure 1: Disadvantages of the near-optimal controller as suggested by Caramanis and Sharifnia

The admissible control policies are a tractable subset of what shall be termed the class of “*maximal*” hedging policies, i.e., hedging control policies characterized by an arbitrary hedging point  $z_\alpha$  in the surplus space associated with each feasible production mode say  $\alpha$  (demand vector inside corresponding capacity set). and such that the production sequence utilized to reach the hedging point *always lies at the “upper” boundary*  $\partial\Omega_\alpha$  of  $\Omega_\alpha$   $\left(\partial\Omega_\alpha = \left\{(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1p}) \mid \sum_i \tau_i u_{1i} = 1\right\}\right)$ . More specifically, the admissible control policies are generated as follows: the upper boundary of a feasible capacity set  $\partial\Omega_\alpha$  is partitioned into distinct regions. Within each region a choice of boundary point  $c \in \partial\Omega_\alpha$  is made, and a fixed given part say  $i$ , the so-called priority part, is allowed to produce at a rate dictated by the  $i$ th component of  $c$  until it reaches the  $i$ th component  $z_{\alpha_i}$  of hedging point  $z_\alpha$ . The priority ordering of parts is dictated by the particular choice of  $c$ . During that phase, other parts produce at the rate corresponding to the component of the chosen  $c$  in  $\Omega_\alpha$ . When part  $i$  surplus level reaches  $z_{\alpha_i}$ , thus requiring only a production of  $d_i$  to maintain itself at  $z_{\alpha_i}$ , the extra allowable



production capacity is reallocated to the part associated with the next lower priority part in that region. Consequently, the flexible manufacturing system is utilized at full capacity at any instant. The information shared by part-types on their positions with respect to their associated hedging level is characterized by a probability density function (p.d.f.) which is that of a first return time (to the hedging level). The multi-part flow control problem is thus reduced to many single part-type problems where the  $j$ th part surplus process  $x_j(t)$  is augmented with a discrete state process  $\tilde{\alpha}_j(t)$  soon to be defined such that  $(x_j(t), \tilde{\alpha}_j(t))$  forms in general a *semi-Markov process*. Thus, while the decoupled single part machines of Caramanis and Sharifnia remain Markovian, for SMH policies separate single part machines are semi-Markovian. For optimization of semi-Markovian machines in a manufacturing context see Glasserman (1995), and Brémaud et al. (forthcoming).

Note that aware of the disadvantages of decoupled production capacity set inscribed hypercube controllers, Caramanis and Sharifnia (1991) proposed an heuristic improvement using a combination of inscribed and circumscribed hypercube controllers as the final step of the design. Since this heuristic can also be applied to SMH policies, we focus throughout this work on comparing the performance of inscribed hypercube controllers performance to that of SMH policies.

In (1994), Srivatsan and Dallery extend known results for single part-type systems and analyze stability and optimality conditions for two-part type systems. The approach followed is a combination of sample path comparisons and average cost analysis of trajectories generated by different control policies. An interesting property emerges from their work, namely that for all the class of maximal hedging policies (i.e., if needed, capacity is always fully utilized), the time required by the surplus trajectories to reach the hedging point is the same. Recently, Perkins and Srikant (1995) provided respectively necessary conditions and sufficient conditions for the optimality of just in time multi-part manufacturing (zero inventory hedging level) under the so-called linear switching curve policies. The results presented in (Perkins and Srikant

1995) can be considered as a particular case (when the machine requires the same time to produce any part-type) of the results presented in Section 7 of the present work.

The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we first formulate the problem of optimal flow control for the system with one machine and many part-types. We state also the disadvantages of the inscribed hypercube near optimal controllers proposed by Caramanis and Sharifnia (1991), and give a preliminary characterization of simple maximal hedging (SMH) policies. In section 3, we summarize a number of results reported in (El-Férik and Malhamé, submitted) concerning the determination of first return probability density functions. The theory presented is crucial for the decoupling of the part-type flow control problems under SMH policies. The theorems and lemmas presented are already adapted in prevision of the cases which are to be dealt with in the rest of the paper. In Section 4, the property of consistency is defined for SMH policies, and it is shown that for every choice of nominal production vector there exists a priority ordering which yields a consistent SMH policy. From this point onwards, the focus is over the set of consistent SMH policies. It is shown that the ability to analyze such policies hinges on an understanding of a generic problem for two semi-Markovian machines called the leader and the follower, respectively associated with the production of a part with given priority and that of the part with next lower priority. The leader-follower problem is analyzed in Section 5. While ergodicity of the controlled processes was assumed up to that point, criteria for such ergodicity to hold are established in Section 6. In Section 7, issues of optimality of just in time SMH policies are considered. Finally, in Section 8, the performance of SMH policies is numerically compared to that of the near optimal inscribed hypercube controllers of Caramanis and Sharifnia, and to that of the optimal control as obtained from a numerical solution of the associated dynamic programming equations.

## 2 Problem statement

We consider a restricted version of Problem (1), which is that of a *multi-part, two-state* manufacturing system for which optimization is sought within the restricted class of SMH policies. Denote the production rate in mode  $\alpha$  to be

$u_\alpha(t) = [u_{\alpha 1}(t), u_{\alpha 2}(t), \dots, u_{\alpha p}(t)]^t$ . Let  $\alpha(t) = 1$  be the operational mode while  $\alpha(t) = 0$  is the failure mode. The production capacity in the failure mode is assumed to be a constant  $u_{0j}(t) < d_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , taken without loss of generality to be zero. Assume  $u_1(t)$  belongs to a convex capacity set defined by the following linear constraints:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \tau_i u_{1i} \leq 1 \\ 0 \leq u_{1i} \leq u_{1i \max} \quad i \in B, \quad B = \{1, \dots, p\}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $u_{1i \max} = \frac{1}{\tau_i} > d$  represents the maximum production capacity whenever all production is dedicated to part  $i$ ,  $i \in B$ . Let  $\partial\Omega_1 = \left\{ (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1p}) \mid \sum_i \tau_i u_{1i} = 1 \right\}$ , be the “upper” boundary of  $\Omega_1$ . The class of simple maximal hedging policies is a subset of maximal hedging policies which is relatively tractable. Such policies are defined as follows:

- step 1: select a particular hedging point  $z = [z_1, z_2, \dots, z_p]^t$ .
- step 2: select a particular point  $c$  in  $\partial\Omega_1$ , with components  $u_{11}^c, u_{12}^c, \dots, u_{1p}^c$ , corresponding to production rates of parts  $i \in B$ , respectively.  $c$  and  $u_1^c$ , will be called respectively the *nominal* production point and vector of production rates of the SMH policy.
- step 3: define a priority ordering of parts which will yield a *consistent* SMH policy for the given choice of  $c$ . A consistent SMH policy is one with a part priority ordering and nominal production vector such that under the resulting production policy, no part inventory can ever reach its associated hedging level, unless *all other part inventories associated with parts of higher priority attain simultaneously, or have already attained, their corresponding hedging levels*. In

Proposition 1 below, it is established that a nominal production vector dependent priority ordering yielding a consistent SMH policy always exists. With the priority ordering thus defined, and assuming part types are relabeled such that priority decreases with an increase in the part index, production for the resulting SMH policy is as follows: for  $\alpha(t) = 0$ , all part surpluses of type  $j \in B$ , decrease respectively at rates  $u_{0j} - d_j$ . When  $\alpha(t) = 1$ , if  $x_i(t) \neq z_i$ , production proceeds according to the nominal production vector. When  $\alpha(t) = 1$ , and  $x_i(t) = z_i$  for  $i = 1, \dots, i_M$ ,  $i_M \leq p$ , the production rate is set at  $d_i$  for parts  $i = 1, \dots, i_M$ , while for parts  $i = i_{M+2}, \dots, p$ , production remains at the nominal rate. However, and in line with the “maximal” part of the requirement on the policy, *all remaining available production capacity is dedicated to part  $i_{M+1}$* , i.e., the part type with highest priority and a still deficient inventory. Thus, this situation will prevail until  $x_1(t)$  falls below  $z_1$  (as soon as  $\alpha(t)$  switches from mode 1 to mode 0), upon which the surplus components  $x_j(t)$  decay at rates  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , respectively. When the manufacturing system mode moves back to 1, production resumes with the same rules as earlier.

The global performance of a given SMH policy will depend on the specific choices of  $z$  and  $c$  which need to be optimized. Note that the above class of policies preserves the notion of hedging points as a safeguard against machine failures, and will do at least as well as the inscribed hypercube near optimal policies of Caramanis and Sharifnia (1991), since for the same choice of  $c \in \partial\Omega_1$ , machine capacity is fully utilized in the SMH policy case. Also, and as we show in Section 6 below, the feasibility requirement for an SMH policy is the same as for any maximal hedging policy namely that *the demand vector lie within the mean capacity set*. Thus, unlike (Caramanis and Sharifnia 1991) where large sections of the set  $\partial\Omega_1$  are excluded for feasibility reasons, all of  $\partial\Omega_1$  is available for choice when SMH policies are considered. Figure (2) illustrates the SMH policy in the two-parts system case.

Clearly, the dynamics of a lower priority part type depends on times of first re-

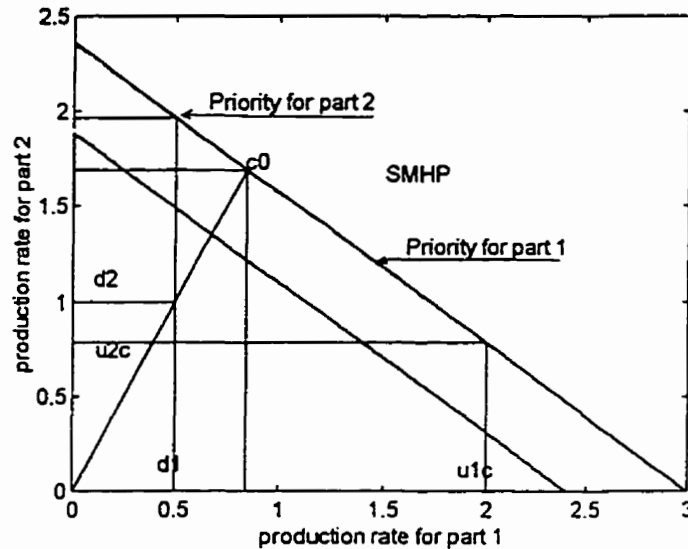


Figure 2: SMH policies for two-part two-mode systems

turns to hedging level of the immediately higher priority part type. Consequently, we first state relevant results that can be easily obtained from (El-Férik and Malhamé, submitted), illustrating the computation of first return time probability density functions.

### 3 First return time p.d.f.'s of surplus processes under hedging control policies

In this section, we summarize a number of results concerning the determination of first return probability density functions, which will be essential for the subsequent analysis of the class of SMH policies of interest.

El-Férik and Malhamé (submitted) consider the finite horizon single part, manufacturing optimal flow control problem. For tractability reasons, optimal control laws are sought within the (suboptimal) class of time-invariant hedging policies. First return p.d.f.'s are central to the dynamics of such policies and the authors show how they

can be obtained using the so-called *probability current method*. The manufacturing system is described by a hybrid state  $(x(t), \alpha(t))$  where  $x(t)$  is the surplus process and  $\alpha(t)$  is the machine mode characterized by known constant intensity matrix  $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ , ( $\lambda_{ij} \geq 0$ ,  $\lambda_{ii} = -\sum_j \lambda_{ij}$ ). The following results, adapted for the particular case of a multi-mode single part manufacturing system where only one mode, namely  $\alpha = 1$ , is feasible (a situation relevant in this paper), can be established from (El-Férik and Malhamé). Define the hybrid probability density functions  $f_i(h, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , when they exist by:

$$f_i(h, t) dh = \Pr[(h < x < h + dh), \alpha(t) = i],$$

$$\forall h \in ]-\infty, z], \text{ and } dh \text{ infinitesimal.}$$

Also, denote the production rate when the system is in mode  $\alpha = 1$ , by  $u_1(t)$  and the demand rate by  $d$ . Finally, define:

$$v_\alpha = \begin{cases} u_1 - d, & \text{when } \alpha(t) = 1. \\ -d, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$V = \text{diag}[v_j], \quad j = 1, \dots, N.$$

and

$$f(x, t) = [f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_N(x, t)]^t.$$

we have the following theorem

**Theorem 1** *Under a hedging control policy with hedging level  $z$ , the p.d.f. of first return time  $T_r$  of the surplus process  $x(t)$  to  $z$ ,  $g(t)$  is given by:*

$$g(t) = v_1 f_1(z^-, t). \quad (3)$$

where  $f_1(z^-, t)$  can be obtained from the following partial differential equation (PDE):

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -V \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \Lambda^t f(x, t), \quad \forall x \in ]-\infty, z], \quad (4)$$

with boundary conditions as follows:

At hedging point  $z$  and for  $t > 0$ :

$$f_j(z^-, t) = 0, \quad j = 2, \dots, N, \quad (49b)$$

In addition :

$$f(x, t) = 0 \quad \forall x > z, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, t) = 0. \quad (6)$$

Furthermore, the following initial conditions must be imposed:

$$f_j(x, 0) = -\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{11}} \delta(x - z^-), \quad j = 2, \dots, N, \quad \forall x \in ]-\infty, z^-]. \quad (7)$$

While for a multi-state system, a closed form solution of  $g(t)$  is beyond reach this is not so for the sequence of moments of  $g(t)$ . Indeed, El-Férik and Malhamé (submitted) develop a complete algorithm for computing the statistical moments of first-passage times for general multi-state systems. These moments represent up to a sign change the coefficients of the Taylor series expansion of the Laplace transform  $G(s)$  of  $g(t)$ . Subsequently, a rational approximation of arbitrary degree of  $G(s)$ , using Padé approximants can be constructed. When the poles of the rational approximation are real, this yields a finite *Markovian* representation of  $g(t)$ .

Under the ergodicity assumption,  $d \in E[\Omega_1]$  (Proposition 2 below),  $F_i(x, s)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\forall x \in ]-\infty, z^-]$ , the Laplace transform of  $f_j(x, t)$  with respect to  $t$  is analytic at  $s = 0$  (El-Férik and Malhamé). Consequently and in view of (3)  $G(s)$  will also be analytic at  $s = 0$ . So let

$$G(s) = 1 - \mu_1 s + \frac{\mu_2}{2} s^2 + \dots + (-1)^k \frac{\mu_k}{k!} s^k + \dots$$

where  $\mu_1 = E[T_r]$ , and  $\mu_k = E[T_r^k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . If we now define:

$$m_k(x) = (-1)^k \left. \frac{\partial^k F(x, s)}{\partial s^k} \right|_{s=0} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall x \in ]-\infty, z^-]. \quad (8)$$

$\mathbf{m}_k(x)$  represents the moment vector of  $k$ th order associated with the vector of p.d.f's  $\mathbf{f}(x, s)$  at  $x \in ]-\infty, z^-]$ . The following result can be obtained from Lemma 2 in (El-Férik and Malhamé, submitted):

**Lemma 1** *Let  $\mathbf{m}_q(x)$  be the vector of moments of the  $q$ th order corresponding to the vector p.d.f.  $\mathbf{f}(x, t)$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ . Under the ergodicity assumption ( $d \in E[C_1]$ , Proposition 2 below), and for  $\mathbf{f}(x, 0) = 0$ ,  $x \in ]-\infty, z^-]$ , the vectors  $\mathbf{m}_q(x)$  satisfy the following recursive system of linear ordinary differential equations (ODE):*

$$\frac{d\mathbf{m}_q(x)}{dx} = \mathbf{V}^{-1} \Lambda^t \mathbf{m}_q(x) + \mathbf{V}^{-1} q \mathbf{m}_{q-1}(x), \quad \forall x \in ]-\infty, z], \quad (9)$$

$$q = 1, 2, \dots,$$

with

$$\frac{d\mathbf{m}_0(x)}{dx} = \mathbf{V}^{-1} \Lambda^t \mathbf{m}_0(x) + \mathbf{V}^{-1} \left[ 0, -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}, -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{11}}, \dots, -\frac{\lambda_{1N}}{\lambda_{11}} \right]^t, \quad \forall x \in ]-\infty, z]. \quad (10)$$

Defining

$$\Gamma_k(x)^t = [\mathbf{m}_0^t(x), \mathbf{m}_1^t(x), \mathbf{m}_2^t(x), \dots, \mathbf{m}_k^t(x)]; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\Gamma_k(x)$  obeys the following ODE:

$$\frac{d\Gamma_k(x)}{dx} = \mathbf{A}_k \Gamma_k(x). \quad (11)$$

where

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \Lambda^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{V}^{-1} & \mathbf{V}^{-1} \Lambda^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 * \mathbf{V}^{-1} & \mathbf{V}^{-1} \Lambda^t & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & k * \mathbf{V}^{-1} & \mathbf{V}^{-1} \Lambda^t \end{bmatrix}$$

Thus:

$$\Gamma_k(x) = \exp(\mathbf{A}_k(x - z)) \Gamma_k(z^-), \quad \forall x \in ]-\infty, z].$$

with,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma_k(x) &= 0, \\ \text{and } \Gamma_k(x) &= 0, \quad \forall x > z \\ \text{for } k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13a)$$



In view of the block triangular structure of  $A_k$  in (11), if  $\gamma$  is an eigenvalue of  $V^{-1} \Lambda^t$ , it is also an eigenvalue of  $A_k$  with multiplicity  $(k + 1)$ . Let  $P_k, Q_k$  be the matrices with columns respectively corresponding to the generalized left and right eigenvectors of  $A_k$  associated with computations up to the  $k$ th moment vectors in the region  $]-\infty, z]$ . Equation (11) can be then put into the Jordan canonical form so that:

$$\frac{d\Gamma_k(x)}{dx} = Q_k \begin{bmatrix} J_{1,k} & & & \\ & J_{2,k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n,k} \end{bmatrix} Q_k \Gamma_k(x), \quad (12)$$

where in  $J_{j,k}$  stands for the Jordan blocks associated with the  $j$ th eigenvalue  $\gamma_j$  of  $V^{-1} \Lambda^t$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

In (El-Férik and Malhamé, submitted), it is shown that the generalized eigenvectors can be computed recursively and that they are independent of the particular choice of  $z$ . Furthermore, in order to meet the boundedness requirement expressed by boundary condition (12), it is necessary that  $\Gamma_k(z^-)$  be orthogonal to the generalized left eigenvectors of  $A_k$  associated with eigenvalues of  $A_k$  with non positive real parts. However, in (Malhamé 1993), Theorem 2, it is shown that the ergodicity assumption ( $d \in E[C_1]$ ) is equivalent to imposing that the number of eigenvalues of matrix  $V^{-1} \Lambda^t$  with positive real parts be exactly equal to  $N - m$ , where  $m$  is the number of feasible modes. In this case,  $m = 1$ , and therefore there is only one eigenvalue with non positive real part, immediately identified with  $\gamma = 0$ . This observation, together with the recursive computation of generalized eigenvectors of  $A_k$  permit an efficient computation of vector moments of arbitrary order in Lemma 1. The algorithm for multiple mode and multiple hedging points is summarized in Theorem 3 of (El-Férik and Malhamé). By matching a sufficient number of moments of  $G(s)$ , one can obtain a rational Padé approximant of that Laplace transform and hence  $g(t)$  can be expressed as a sum of exponential functions if all poles of the approximant are real. Given that  $G(s)$  is the Laplace transform of a p.d.f., the Padé approximant would then yield an approximate parallel Markovian realization of  $g(t)$ . whereby,

$$G(s) \simeq \sum_{i=1}^{\sigma} \omega_i \frac{\varphi_i}{s + \varphi_i}, \quad (13)$$

with  $\omega_i > 0$ ,  $\varphi_i > 0$  and  $\sum_{i=1}^{\sigma} \omega_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, \sigma$ .

Note that a competing approach for Markovianization is the method of Coxian phases (see for example Hu and Xiang 1995). However, computations can be come very tedious (non linear equations need to be solved) when several moments of  $g(t)$  are to be matched for greater precision.

We recall a few useful facts about Padé approximants (see Baker 1975) which insure that the application of this approximation approach is relatively safe. In the present context, Padé approximants are used to provide a rational fraction approximation  $\frac{P_{\sigma+j}(s)}{Q_{\sigma}(s)}$  which will partially match (first  $2\sigma + j$  coefficients) of the Taylor series expansion at  $s = 0$  of the Laplace transform  $G(s)$ .  $P_{\sigma+j}(s)$  and  $Q_{\sigma}(s)$  are polynomials with degree  $\sigma + j$  and  $\sigma$  respectively,  $j \geq 1$ , (Baker 1975). If the Taylor series at  $s = 0$  of  $G(s)$  corresponds to a so-called Stieltjes' series (see Baker 1975, p. 211), then all poles and zeros of the approximant are *negative real* and the zeros are intertwined with the poles (see Baker 1975, p.213). Notice that it can be shown that the expansion of  $G(s)$  corresponds to a Stieltjes' series. Thus Padé approximants will *always* yield a Markovianization of the form (13). In addition, because of the Stieltjes' property, the quality of the approximants improves monotonically as the order increases (see El-Férik and Malhamé Section 5, and Baker 1975 for further details).

Accordingly when the high priority part, say  $i$ , is such that  $x_i(t) \neq z_i$ , the lower priority part, say  $j$ , is associated with a fictitious Markovian machine which can be in any one of  $\sigma$  (unobservable) Markovian failure states with mean sojourn time  $\frac{1}{\varphi_{\ell}}$ ,  $\ell = 1, \dots, \sigma$ . Thus the Markov process approximation of the  $\tilde{\alpha}_j(t)$  semi-Markov process ( $\tilde{\alpha}_j(t) = 0$ , if  $x_i(t) \neq z_i$ ,  $\tilde{\alpha}_j(t) = 1$ , if  $x_i(t) = z_i$ ) which we call  $\tilde{\alpha}_{Mj}(t)$  evolves

according to the following intensity matrix:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \omega_1 \lambda_1 & \dots & \omega_\sigma \lambda_1 \\ \varphi_1 & -\varphi_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \varphi_\sigma & & & -\varphi_\sigma \end{bmatrix}. \quad (14)$$

In the following section, we establish the existence of consistent SMH policies, in the sense that an SMH policy associated with a given choice  $c$  of  $\partial C_1$ , dictates a priority ordering of parts such that the hedging level associated with the higher priority part is always reached *before or at the same time* as the hedging level of any lower priority part. This consistency property starts holding after the surplus process  $x(t)$  hits the hedging point  $z$  for the first time. In view of the fact that infinite horizon performance will be unaffected by the initial (almost surely finite) transient until the hedging point is first attained, we assume without loss of generality and throughout section 5 that the initial inventory  $x_0 = [z_1, z_2, \dots, z_p]^t$ .

## 4 Consistency of SMH policies

As mentioned earlier, SMH policies require an ordering of part priorities characterizing the way in which any extra production capacity, freed whenever the inventory of a given part attains the required hedging level, is reallocated to speed up inventory buildup for the remaining inventory deficient parts. A consistent part priority scheme for an SMH policy is defined as one whereby the inventory of a given part will never reach the associated hedging level unless all inventories of higher priority parts are either simultaneously reaching or have already reached their corresponding hedging levels. Proposition 1 below delineates the priority assignment scheme which results in a consistent SMH policy.

**Proposition 1** *Let  $c \in \partial \Omega_1$  and  $z$  define respectively the nominal production vector and the hedging point of an SMH policy with priority ordering yet to be defined in a multi-part manufacturing systems. Let  $B = \{1, \dots, p\}$  be the part index set. Let  $\Gamma_{ij}$  be*

the sets defined by:

$$\Gamma_{ij} = \left\{ c' \in \partial\Omega_1 : \frac{u_j^{c'}}{u_i^{c'}} \leq \frac{d_j}{d_i} \right\} \quad i, j \in B; j \neq i$$

and let  $D_i(c) = \{j \in B \mid c \in \Gamma_{ij}\}$ ,  $i \in B$ . One of two situations can occur:

- (a) no pair  $i, j \in B$ ,  $i \neq j$ , is such that  $i \in D_j(c)$  and  $i \in D_i(c)$ . Then a priority ordering such that part  $i$ ,  $i \in B$ , is assigned a higher priority than all the parts types with index in  $D_i(c)$  results in a consistent SMH production policy
- (b) for some pairs  $i, j \in B$ ,  $i \neq j$ ,  $\frac{u_j^c}{u_i^c} = \frac{d_j}{d_i}$ . Then for such pairs  $i \in D_j$ , while  $j \in D_i$ . As a first step, use the priority ordering algorithm in (i) with the pair  $i, j$ , equally ranked. Subsequently, any arbitrary priority reordering amongst equally ranked indices, will result in a consistent SMH production policy.

**Proof.** See Appendix. ■

From Proposition 1, the following can be concluded:

- $\partial\Omega_1$  can be partitioned in the capacity set, into many regions with distinct (consistent) priority assignments, namely:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \left\{ c \in \partial\Omega_1 : \frac{u_j^c}{u_i^c} < \frac{d_j}{d_i} \right\} \quad i, j \in B. \quad i \neq j, \\ \Gamma_0 &= \left\{ c_0 \in \partial\Omega_1 : \frac{u_j^{c_0}}{u_i^{c_0}} = \frac{d_j}{d_i} \right\} \quad i, j \in B. \quad i \neq j, \end{aligned}$$

In the region of  $\partial\Omega_1$  such that  $u_j^c > \frac{d_j}{d_i} u_i^c$ ,  $i \in B$ , part  $j$  will be the high priority part, when  $u_{1j}^{c_0} = \frac{d_j}{d_i} u_{1i}^{c_0}$ ,  $i \in B$ , parts have equal priority and in fact for a choice  $c_0^*$  such that  $\frac{u_{1j}^{c_0^*}}{u_{1i}^{c_0^*}} = \frac{d_j}{d_i} \forall i, j \in B$  an SMH policy based on  $c_0^*$  will performs exactly like the associated near optimal policy of (Caramanis and Sharifnia 1991). Finally for  $u_j^c < \frac{d_j}{d_i} u_i^c$ , part  $i$  will be assigned the higher priority.

- the only way to reach the hedging point  $z_i$ , associated with part type  $i$ , under SMH policies is by moving inside the subspace of dimension  $p - i - 1$ ,  $i \in B$ , defined by the part surplus subspace  $x_j = z_j$ ,  $j = 1, \dots, i - 1$ .

Thus, summarizing, let  $c \in \partial\Omega_1$  and  $z$  define respectively the nominal production vector and the hedging point of an SMH policy. Assume that a relabeling of part type indices has been performed so as to associate a decreasing priority with an increasing part type index. Then the production rules of the resulting SMH policy are formally given by:

$$u_{\alpha 1} = \begin{cases} u_{11}^c & \text{if } x_1 < z_1; \alpha(t) = 1, \\ d_1 & \text{if } x_1 = z_1; \alpha(t) = 1, \\ 0 & \alpha(t) = 0, \end{cases}$$

$$u_{\alpha 2} = \begin{cases} u_{12}^c & \text{if } x_1 \neq z_1; x_2 < z_2; \alpha(t) = 1, \\ \tilde{u}_{12}^c & \text{if } x_1 = z_1; x_2 < z_2; \alpha(t) = 1, \\ d_2 & \text{if } x_1 = z_1; x_2 = z_2; \alpha(t) = 1, \\ 0 & \alpha(t) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

and in general for part-type  $i$ ,  $i \geq 2$  :

$$u_{\alpha i} = \begin{cases} u_{1i}^c & \text{if } x_{i-1} \neq z_{i-1}; x_i < z_i; \alpha(t) = 1, \\ \tilde{u}_{1i}^c & \text{if } x_{i-1} = z_{i-1}; x_i < z_i; \alpha(t) = 1, \\ d_i & \text{if } x_{i-1} = z_{i-1}; x_i = z_i; \alpha(t) = 1, \\ 0 & \alpha(t) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

where  $\tilde{u}_{1i}^c$ ,  $i = 2, \dots, p$ , is obtained from a recursive equation we now develop.

$\tilde{u}_{1i}^c$ ,  $i \in B$  represents the increased production rate of part type  $i$  whenever part  $i - 1$  reaches its own hedging level.

Initially:

$$\sum_{i=1}^p \tau_i u_{1i}^c = 1.$$

After  $x_1(t)$  attains  $z_1$  :

$$\tau_1 d_1 + \tau_2 \tilde{u}_{12}^c + \sum_{i=3}^p \tau_i u_{1i}^c = 1.$$

and comparing the two equations:

$$\tau_1 d_1 + \tau_2 \tilde{u}_{12}^c = \tau_1 u_{11}^c + \tau_2 u_{12}^c.$$

Thus:

$$\tilde{u}_{12}^c = \frac{\tau_2 u_{12}^c + \tau_1 (u_{11}^c - d_1)}{\tau_2}. \quad (17)$$

If under the new production rates, the machine remains operational long enough for  $x_2(t)$  to reach  $z_2$ , then, just before:

$$\tau_1 d_1 + \tau_2 \tilde{u}_{12}^c + \tau_3 u_{13}^c + \sum_{i=4}^p \tau_i u_{1i}^c = 1.$$

After,  $x_2(t) = z_2$  :

$$\tau_1 d_1 + \tau_2 d_2 + \tau_3 \tilde{u}_{13}^c + \sum_{i=4}^p \tau_i u_{1i}^c = 1,$$

and consequently:

$$\tilde{u}_{13}^c = u_{13}^c + \frac{\tau_2 (\tilde{u}_{12}^c - d_2)}{\tau_3}.$$

In general, it is not difficult to see that the following recursion holds:

$$\tilde{u}_{1i+1}^c = u_{1i+1}^c + \frac{\tau_i (\tilde{u}_{1i}^c - d_i)}{\tau_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (18)$$

with  $\tilde{u}_{11}^c = u_{11}^c$ .

Thus part-type 1 surplus evolves as though it was produced by a single-part failure prone Markovian machine with capacity set  $[0, u_{11}^c]$ , when  $\alpha = 1$ . and zero otherwise.

Denote by  $T_{r_i}$  the time interval between the instant the surplus-type  $i$  leaves hybrid state  $(z_i, 1)$  to the instant when it first returns to  $(z_i, 1)$ ,  $i \in B$ . Define  $v_{1j}$  as the surplus rate of increase for part-type  $j$ ,  $j \in B$ , when the system is in mode  $\alpha = 1$ . When  $\alpha = 0$ , the surplus of each part decreases at rates  $d_j$ ,  $j \in B$ , respectively, whereas when  $\alpha = 1$ , if  $x_1(t) \neq z_1$ ,  $x_1(t)$  increases at a rate  $v_{11} = u_{11}^c - d_1$  and  $x_j(t)$  increases at a rate  $v_{1j} = u_{1j}^c - d_j$ ,  $j = 2, \dots, p$ . Denote by  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$  the situation when  $\alpha(t) = 1$  and  $x_1(t) = z_1$ , while  $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$  otherwise. From Proposition 1, we know that  $x_1(t)$  will hit  $z_1$  before  $x_j(t)$  hits  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . At that point  $x_2(t)$  increases at a different rate  $\tilde{v}_2^1 = \tilde{u}_{12}^c - d_2$ , where  $\tilde{u}_{12}^c$  is defined in equation (17). Note that while  $x_1(t)$  has Markovian dynamics entirely independent of  $x_2(t)$ , this is not so for  $x_2(t)$ . Thus, the lower priority part 2 can be viewed as though it was produced by a single-part two-mode ( $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$  and  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$ ) failure prone semi-Markovian machine with

one operational mode associated with an exponential sojourn time (while  $x_1(t) = z_1$ ) and a failure mode associated with a sojourn time corresponding to a first return time random variable (first return of  $x_1(t)$  to  $z_1$ ).

The approach to analyzing the cost associated with the semi-Markovian machine consists in two steps. During the first step the first return random variable (sojourn time in failure mode) is Markovianized using a Padé approximants technique for multi-mode Markovian machines as summarized in section 4. Subsequently, by associating an adequately chosen constant part surplus rate of decrease during the Markovianized failure time and leaving the surplus rate of increase unchanged when  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$ , a Markovian "biased" version  $(\tilde{x}_2(t), \tilde{\alpha}_{M2}(t))$  of  $(x_2(t), \alpha_2(t))$  is obtained whereby  $\tilde{x}_2(t) \equiv x_2(t)$  whenever  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$  (i.e., when  $x_1(t) = z_1$ ), while  $\tilde{x}_2(t) > x_2(t)$  otherwise. The surplus steady-state p.d.f.'s for this biased two-velocity multi-mode Markovian machine can be obtained using Sharifnia's technique (Sharifnia 1988). The second step consists in recognizing that error random variable  $\varepsilon_2(t) \equiv \tilde{x}_2(t) - x_2(t)$  behaves while  $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$  as a surplus deviation during the first return of  $\varepsilon_2(t)$  (the surplus process of a two-mode Markovian machine) to zero (hedging level), and subsequently applying a so-called bias removal procedure based on results summarized in Section 4. In fact the same procedure can be applied when moving from the  $i$ th semi-Markovian machine for part-type  $i$  ( $\tilde{\alpha}_i(t) = 0$  if  $x_{i-1}(t) \neq z_{i-1}$ ,  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  if  $x_{i-1}(t) = z_{i-1}$ ) to the  $(i+1)$ th semi-Markovian ( $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 0$  if  $x_i(t) \neq z_i$ ,  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$  if  $x_i(t) = z_i$ ) for lower priority part type  $i+1$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ . Thus, except for  $i = 1$ , where the machine is Markovian, every machine, producing part type  $i$  say, is a two-mode failure prone semi-Markovian machine characterized by a semi-Markov process  $\tilde{\alpha}_i(t)$ .  $\tilde{\alpha}_i(t)$  is a two-mode process  $(0, 1)$  with one operational mode associated with an exponential sojourn time (while  $x_{i-1}(t) = z_{i-1}$ ) and a failure mode associated with a sojourn time corresponding to a first return time random variable (first return of  $x_{i-1}(t)$  to  $z_{i-1}$ ).

Hence the analysis of a generic two-machine problem, say machine  $i$ ,  $i + 1$ ,  $i = 1, \dots, p - 1$ , producing parts  $i$  and  $i + 1$  of decreasing priority, hereon referred to as the leader and the follower respectively can become a useful building block in analyzing the performance of a given SMH policy in a multi-parts manufacturing system. This is the object of the next section where we develop the approach for computing the portion of the cost of a given SMH policy associated with the part produced by the follower.

## 5 Construction of the biased version of the follower part surplus process and subsequent removal of the bias

Assume that there exists a semi-Markovian process denoted  $(\tilde{\alpha}_i(t), \tilde{x}_i(t))$  called the biased version of  $(\tilde{\alpha}_i(t), x_i(t))$  for a given  $i = 1, \dots, p - 1$ .  $\tilde{x}_i(t)$  is a two-velocity process (a positive velocity  $\tilde{v}_{li}$  when  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  (with  $\tilde{v}_{li} = v_{li}$ ) and a negative velocity  $-\tilde{d}_i$  (with  $\tilde{d}_i = d_i$ )), for some  $i = 1, \dots, p - 1$ , and such that  $\forall t \geq 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{when } \tilde{\alpha}_i(t) = 0 \quad \text{either} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{d}_i = d_i \quad \tilde{x}_i(t) = x_i(t) \\ \text{or} \\ \tilde{d}_i < d_i \quad \tilde{x}_i(t) > x_i(t), \text{ as long as } \tilde{\alpha}_i(t^-) \neq 1 \text{ and } \tilde{\alpha}_i(t^+) \neq 1 \end{array} \right. \\ \text{when } \tilde{\alpha}_i(t) = 1 \quad \tilde{x}_i(t) = x_i(t) \end{array} \right. \quad ..$$

The next lemma establishes the existence of the biased semi-Markovian version of  $(\tilde{\alpha}_{i+1}(t), x_{i+1}(t))$ .

**Lemma 2** *For the immediately lower priority part,  $i+1$ , a biased version  $(\tilde{\alpha}_{i+1}(t), \tilde{x}_{i+1}(t))$  of  $(\tilde{\alpha}_{i+1}(t), x_{i+1}(t))$  exists, where  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$  if  $x_i(t) = z_i$  and 0 otherwise.  $\tilde{x}_{i+1}(t)$  is a two-velocity process with a positive velocity  $\tilde{v}_{li+1}$ , and a negative velocity process*

$$\tilde{d}_{i+1} \leq d_{i+1}. \quad (19)$$

given by

$$\tilde{d}_{i+1} = \frac{\tilde{v}_{li}}{\tilde{v}_{li} + \tilde{d}_i} d_{i+1} - \frac{v_{li+1} \tilde{d}_i}{\tilde{v}_{li} + \tilde{d}_i}, \quad (20)$$



where the rate  $d_{F_{i+1}}$  can be expressed as follows:

$$d_{F_{i+1}} = \frac{v_{1i} + \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i} d_{i+1} - \frac{d_i - \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i} v_{1i+1}.$$

Furthermore:

$$\begin{aligned} \text{if } \tilde{d}_{i+1} = d_{i+1} \quad \tilde{x}_{i+1}(t) = x_{i+1}(t) \quad \text{while} \\ \text{if } \tilde{d}_{i+1} < d_{i+1} \quad \tilde{x}_{i+1}(t) = x_{i+1}(t) \quad \text{when } \tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1, \text{ and} \\ \tilde{x}_{i+1}(t) > x_{i+1}(t) \quad \text{as long as } \tilde{\alpha}_{i+1}(t^-) \neq 1 \text{ and } \tilde{\alpha}_{i+1}(t^+) \neq 1 \end{aligned} \quad (21)$$

**Proof.** See Appendix. ■

The following corollary is a consequence of inequality (21)

**Corollary 1** let  $\varepsilon_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t)$ ; be the bias between  $\tilde{x}_i(t)$  and  $x_i(t)$ . If  $\tilde{d}_i < d_i$ , for  $t_i < t < t_i + T_{r_i}$ ,  $\varepsilon_i(t) \neq 0$  and evolves according to:

$$\frac{d\varepsilon_i(t)}{dt} = \begin{cases} -v_{1i} - \tilde{d}_i & \text{if } \alpha(t) = 1. \\ d_i - \tilde{d}_i & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (22)$$

Thus, under a consistent SMH policy, and given the partwise additive nature of the cost functional ( $\ell(x)$ ), it is possible to reduce the optimization of the global hedging point to  $p$  decoupled scalar optimization problems, one for each part type. The first problem associated with the Markov process  $[x_1(t), \alpha(t)]^t$  can be solved easily and the optimization can be carried out independently and yields the same solution as given by Bielecki and Kumar (1988). However, for  $i \geq 2$ , by recalling that the off period of  $\tilde{\alpha}_i(t)$  is a first return random variable, one can use the material presented in section 3, to Markovianize that return random variable and thereby the process  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_i(t)]^t$ . The Markovianized process will be denoted  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_{Mi}(t)]^t$ .

With the  $\tilde{x}_i(t)$  process thus Markovianized,  $i = 2, \dots, p$ , it is possible to determine the steady-state p.d.f's of the hybrid Markov process  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_{Mi}(t)]^t$ ;  $\tilde{f}_{Mk}(\tilde{x}_i)$ ,  $k = 1, \dots, q_i + 1$ , (where  $q_i$  is the order of the exponential approximation in Eq. (13)), using for example Sharifnia's approach (Sharifnia 1988). In particular we are interested in the p.d.f.'s  $\tilde{f}_1(\tilde{x}_i) = \tilde{f}_{M1}(\tilde{x}_i)$ , and  $\tilde{f}_0(\tilde{x}_i) = \sum_{l=2}^{q_i+1} \tilde{f}_{Ml}(\tilde{x}_i)$ , of the semi-Markov process

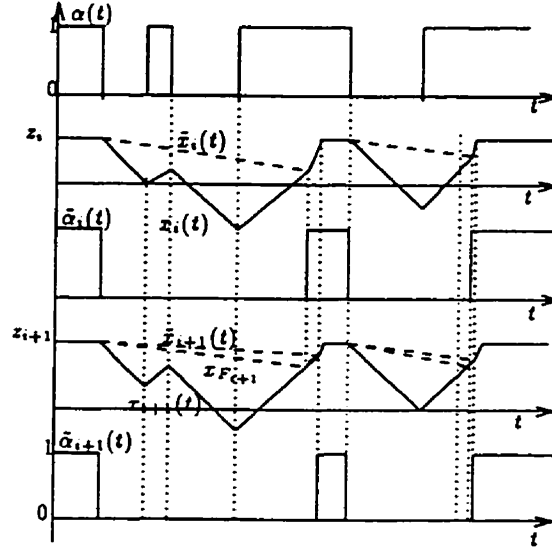


Figure 3: Construction of the biased version of  $x_{i+1}(t)$ , from the follower part surplus process

$[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_i(t)]^t$  respectively corresponding to  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$ , and  $\tilde{\alpha}_i(t) = 0$ . Define  $f_1(x_i)$  and  $f_0(x_i)$  as the steady state p.d.f.'s associated with the hybrid process  $[x_i(t), \alpha_i(t)]^t$ . Recall that  $\tilde{x}_i(t) = x_i(t)$  whenever  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  whereas for  $\tilde{\alpha}_i(t) = 0$ ,  $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \varepsilon_i(t)$  where  $\varepsilon_i(t)$  evolves according to corollary 1.

Recalling Lemma 1, it is then possible to use the PDE system of Theorem 1 with the appropriate velocities, to propagate the p.d.f.  $\tilde{f}(\varepsilon)$  of  $\varepsilon$ . The following Lemma characterizes the steady-state p.d.f.  $f_0(x_i)$ :

**Lemma 3 :** *Let  $\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i)$  be the p.d.f. of the bias  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i \in B$ . Under the ergodicity condition ( $d \in E[\Omega_1]$ ), the following holds:*

$$f_0(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{f}_0(x_i - \varepsilon_i) \tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) d\varepsilon_i. \quad (23)$$

where  $\tilde{f}_0(x_i - \varepsilon_i) = \sum_{l=2}^{q_i+1} \tilde{f}_{Ml}(x_i - \varepsilon_i)$  and

$$\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = \beta \exp(-\beta \varepsilon_i),$$

with

$$\beta = \left[ \frac{v_i^1 + d_i}{v_i^1 + \tilde{d}_i} \right] \frac{1}{(d_i - \tilde{d}_i) E[T_{r_{i-1}}]}. \quad (24)$$

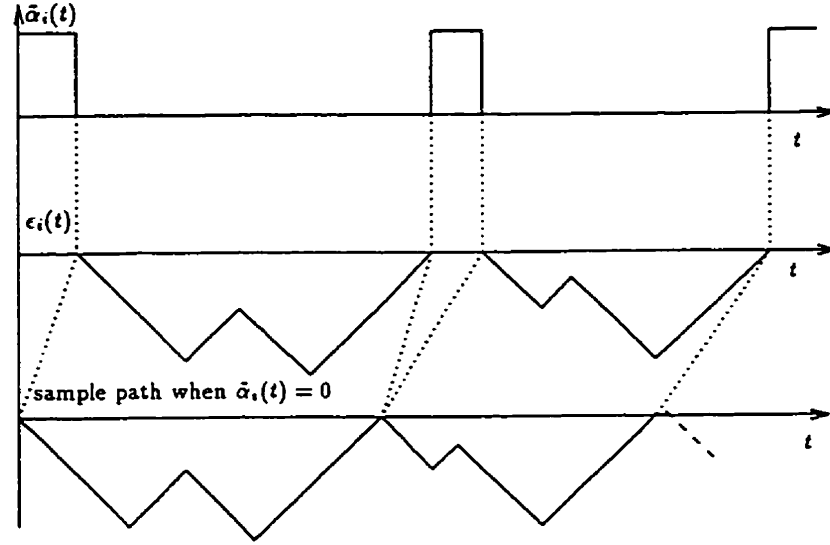


Figure 4: Equivalent regenerative process corresponding to the off portions of  $\tilde{\alpha}_i(t)$ .

where

$$E[T_{r_{i-1}}] = \frac{\tilde{v}_{i-1}^1 + \tilde{d}_{i-1}}{\frac{\tilde{v}_{i-1}^1}{E[T_{r_{i-2}}]} - \lambda_1 \tilde{d}_{i-1}}, \quad i = 3, \dots, p+1. \quad (25)$$

with

$$E[T_{r_1}] = \frac{v_1^1 + d_1}{\lambda_0 v_1^1 - \lambda_1 d_1} \quad (26)$$

**Proof.** See Appendix. ■

In summary in order to evaluate the cost associated with a given SMH policy, as the sum of the contributions of each part type  $i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , one proceeds as follows:

**Theorem 2** Define the alternating renewal process  $\tilde{\alpha}_i(t)$  to be zero when  $x_{i-1}(t) \neq z_{i-1}$  and one for  $x_{i-1}(t) = z_{i-1}$ , for  $i = 2, \dots, p$ . The cost associated with part type  $i$ , can be computed via a four-step procedure, :

- Construction of the biased version of  $x_i(t)$  denoted  $\tilde{x}_i(t)$  which is a two-velocity process: a positive velocity  $\tilde{v}_1$ , when  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  and a negative velocity  $-\tilde{d}_1$ , when  $\tilde{\alpha}_i(t) = 0$ , such that:

– for  $i = 2$ ,

$$\tilde{d}_2 = \frac{v_{11}}{v_{11} + d_1} d_2 - \frac{v_{12} d_1}{v_{11} + d_1}. \quad (27)$$

– for  $i \geq 3$ ,

$$\tilde{d}_{i+1} = \frac{\tilde{v}_{1i}}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i} d_{F_{i+1}} - \frac{v_{1i+1} \tilde{d}_i}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i}, \quad (28)$$

where the rate  $d_{F_{i+1}}$  can be expressed is given by:

$$d_{F_{i+1}} = \frac{v_{1i} + \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i} d_{i+1} - \frac{d_i - \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i} v_{1i+1}.$$

- Markovianization of the  $(\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_i(t))$  using the material in Section 3 on first return times and the computation of the associated steady state-densities
- Correction for bias, with

$$f_0(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{f}_0(x_i - \varepsilon) \tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (29)$$

where  $\tilde{f}_0(x_i - \varepsilon) = \sum_{l=2}^{q_i+1} \tilde{f}_{Ml}(x_i - \varepsilon)$  and

$$\tilde{f}(\varepsilon) = \beta \exp(-\beta \varepsilon).$$

with

$$\beta = \left[ \frac{v_i^1 + d_i}{v_i^1 + \tilde{d}_i} \right] \frac{1}{(d_i - \tilde{d}_i) E[T_{r_{i-1}}]}. \quad (30)$$

while

$$E[T_{r_{i-1}}] = \frac{\tilde{v}_{i-1}^1 + \tilde{d}_{i-1}}{\frac{\tilde{v}_{i-1}^1}{E[T_{r_{i-2}}]} - \lambda_1 \tilde{d}_{i-1}}, \quad i = 3, \dots, p+1. \quad (31)$$

and

$$E[T_{r_1}] = \frac{v_1^1 + d_1}{\lambda_0 v_1^1 - \lambda_1 d_1} \quad (32)$$

- determination of the cost contribution of part type  $i$  via integration of the corresponding cost functional over the part  $i$  surplus space equipped with the stationary measure  $F_{x_i}(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} [f_0(x) + f_1(x)] dx$ ,  $\mu \in (-\infty, z_i]$ .

Notice that for  $i = 1$ , cost computations and hedging point optimization proceed as for usual two-state Markovian machines (see Bielecki-Kumar 1988).

Throughout the above analysis, the existence of an ergodic steady-state for each of the surplus random variables  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , has been assumed. In the following, it is shown that the criterion for ergodicity of SMH policies reduces as expected (see Caramanis and Sharifnia 1991 for example) to requiring that the mean capacity set contain the vector of rate of demand for parts.

## 6 Ergodicity of SMH control policies

In the following, we derive conditions under which the maximal hedging policies are ergodic, and thus all component marginal p.d.f.'s converge to a unique steady-state.

In (1994), Srivatsan and Dallery prove that if the capacity of the system is always fully utilized whenever one part is away from its associated hedging point, then all the policies described by hypercubes defined by  $c \in \partial\Omega_1$  generate trajectories that reach their corresponding hedging levels at *exactly the same time*. Thus, one can focus on times to first returns to the hedging point to build an embedded alternating renewal process. This process will be ergodic if return occurs with probability one and the mean return times are finite. Since  $c_0^* \in \partial\Omega_1$ , then SMH policies are ergodic if  $c_0^*$  is an ergodic hedging policy. Recall from section 4 that under  $c_0^*$  all the parts have the same priorities and reach their respective hedging levels at the same time. Thus it is sufficient that part-type 1 have a finite mean return time to  $z_1$ . This is equivalent (see Malhamé 1993, Bielecki and Kumar 1988) to requiring:

$$\pi_1 u_1^{c_0^*} > d_1, \quad (33)$$

where  $\pi_1$  represents the stationary probability of the on state. It is given by  $\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}$ , and with

$$u_1^{c_0^*} = \frac{d_1}{\sum_{i=1}^p \tau_i d_i},$$

using (33) and the above equation one obtains:

$$\sum_{i=1}^p \tau_i d_i < \pi_1, \quad (34)$$

which is the same as

$$\sum_{i=1}^p \bar{\tau}_i d_i < 1, \quad (35)$$

where  $\bar{\tau}_i = E[\tau_i]$ ,  $i = 1, \dots, p$ . This yields

**Proposition 2** *For the multi-part systems, the class of SMH policies is ergodic if the demand vector  $[d_1, d_2, \dots, d_p] \in E[\Omega_1]$*

Note that an equivalent condition was derived by Srivatsan and Dallery (1994). However the authors do not seem to have recognized the transparent interpretation in Proposition 2.

## 7 Optimality of the zero inventory level

In (Brémaud et al. forthcoming) necessary and sufficient conditions were given to establish the optimality of the zero inventory level for a single part two-mode (0,1) non Markovian ergodic machine having the following incurred cost  $\ell(x) = c^+ \max(x, 0) + c^- \max(-x, 0)$ . It asserts using first derivative estimates of the steady-state optimal cost with respect to the hedging level, that zero inventory level is a minimizer if and only if (see Brémaud et al. forthcoming, Theorem 2)

$$\frac{c^-}{c^+ + c^-} \leq P[x = 0] = \frac{\pi_1(u_1 - d_1) - \pi_0 d_1}{(u_1 - d_1)} \quad (36)$$

where  $\pi_i, i = 0, 1$ , is the probability distribution of mode  $i$ .

On the other hand for multi-part system with  $p$  part-types, we have shown in the previous sections that under SMH policies the original flow control problem can be decomposed into  $p$  *single part independent* flow control problems.

However for multi-part type systems, the componentwise application of the optimality criteria in (36) gives only necessary conditions for the optimality of a global zero inventory level  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p] = 0$ . Thus the semi-Markov machine characterized by the process  $[\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_i(t)]^t$  admits a zero inventory level if and only if

$$\frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-} \leq P[\tilde{x}_i = z_i] = P[x_i = z_i] \quad (37)$$

with the probability  $P[x_i = z_i]$  is given by

$$P[x_i = z_i] = \frac{\pi_{1i}(\tilde{u}_{1i}^c - d_i) - \pi_{0i}\tilde{d}_i}{(\tilde{u}_{1i}^c - d_i)} \quad (38)$$

$$i = 2, \dots, p,$$

where  $\pi_{1i}$  and  $\pi_{0i} = 1 - \pi_{1i}$  represent the stationary probability distribution of  $\tilde{\alpha}_i(t)$ .

In fact:

$$P[\tilde{\alpha}_i(t) = 1] = \pi_{1i} = \frac{1}{1 + \lambda_1 E[T_{r_{i-1}}]}. \quad (39)$$

with  $T_{r_{i-1}}$  representing the first return time random variable of  $x_{i-1}(t)$  to its associated hedging level.  $E[T_{r_{i-1}}]$  can be computed using known results on M/GI/1 queue (see Srivatsan and Dallery 1994, corollary 3 and references therein cited) or alternatively it is easily determined by computing the expected value of the first return time random variable of the Markov bias  $\varepsilon_i(t)$  to zero, using the techniques presented in Section 3. This yields:

$$E[T_{r_{i-1}}] = \frac{u_{1i}^c}{\lambda_0(u_{1i}^c - d_i + \tilde{d}_i) - \lambda_1(d_i - \tilde{d}_i)}, \quad (40)$$

$$i = 2, \dots, p.$$

For  $i = 1$ ,

$$P[x_1 = z_1] = \frac{\pi_{11}u_{11}^c - d_1}{(u_{11}^c - d_1)} \quad (41)$$

where  $\pi_{11} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}$ , (since  $\alpha(t)$  is a Markov process). Proposition 3 below follows easily from (37)

**Proposition 3** *A necessary condition for the global optimality of the zero inventory hedging level  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p] = 0$ , with this class of SMH policies is that there exist a nominal production point  $c \in \partial\Omega_1$  such that:*

$$\frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-} \leq P[x_i = z_i] \quad (42)$$

$$i = 1, \dots, p,$$

where it is assumed that a relabeling of part types has been performed whereby priority decreases with an increase in the part type index and  $P[x_i = z_i]$  are given by (38), (39), (40) and (41). Furthermore the following sufficient condition for a zero global inventory hedging level can be written:

**Proposition 4** *A sufficient condition for the optimality of zero inventory hedging level  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_p] = 0$ , within the class of SMH policies is  $P[x_1 = z_1] = \frac{\pi_{11}u_{11}^{c_1^0} - d_1}{(u_{11}^{c_1^0} - d_1)} \geq \max_{i=1, \dots, p} \left\{ \frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-} \right\}$ .*

*In particular, the optimal hedging point for part-type  $i$  is zero if*

$$P[x_p = z_p] = \frac{\pi_{11}u_{11}^{c_1^0} - d_1}{(u_{11}^{c_1^0} - d_1)} \geq \frac{c_i^-}{c_i^+ + c_i^-}. \quad (43)$$

**Proof.** See Appendix. ■

Note that in the case of a zero optimal inventory level, the semi-Markov machine and the original machine respectively characterized by  $[\bar{x}_{i+1}(t), \bar{\alpha}_{i+1}(t)]^t$  and  $[x_{i+1}(t), \alpha_{i+1}(t)]^t$  have the same hedging level. This is not so in general.

In the following, we numerically test the proposed algorithms, evaluate the performance of SMH policy by comparing it to that of decoupled inscribed hypercube policy and to that of the optimal control as given by the dynamic programming equation.

## 8 Numerical results

Let

$$\tau_1 = \frac{1}{3}, \quad \tau_2 = \frac{1}{2.3571}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad d = [0.5 \quad 1], \quad c_1^+ = c_2^+ = 1,$$

and  $c_1^- = c_2^- = 5$ . For this special case the Laplace transform  $G(s)$  of  $g(t)$  can be obtained from the PDE system in theorem 1. The result is

$$G(s) = \frac{2\lambda_2(u_1^c - d_1)}{\lambda_2(u_1^c - d_1) + \lambda_1 d_1 + u_1^c s + \theta(s)}. \quad (44)$$

where

$$\theta(s) = \sqrt{(u_1^c)^2 s^2 + 2s[\lambda_2(u_1^c - d_1) + \lambda_1 d_1]u_1^c + [\lambda_2(u_1^c - d_1) + \lambda_1 d_1]^2}.$$



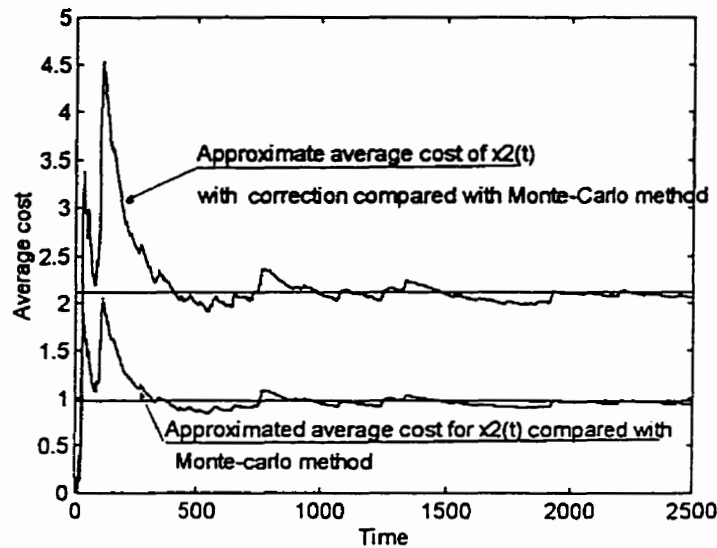


Figure 5: Testing the quality of a Markovian approximation of the biased process  $\tilde{x}_2(t)$  before and after bias correction, for Padé approximants of order 5.

Using a Taylor series of (44) one can build a Padé approximant of  $G(s)$ , since the direct inversion of the Laplace transform does not yield a closed form solution.

Figure 5 is a numerical confirmation of the validity of the presented approximation procedure. It shows how the Markovianized biased process can give an estimate of the steady-state average cost associated with the biased process itself  $(\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_{Mi}(t))$  versus that associated with the  $(\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_i(t))$  process. Also the cost of  $x_i(t)$  is compared with that  $(\tilde{x}_i(t), \tilde{\alpha}_{Mi}(t))$  after bias correction. Padé approximants of order 5 were used. Monte-Carlo simulations were utilized to validate the approximations. The results are in general very good.

Figure 6 represents the optimization of the steady-state average cost functional under SMH policies over the production capacity space with numerical minimization to find the hedging level associated with the Markovianized process. The cost over the capacity space is then compared to the costs of the decoupled inscribed hypercube policies of Caramanis and Sharifnia (1988) for the same system. We observe a

somewhat significant improvement provided by the SMH policy controller design.

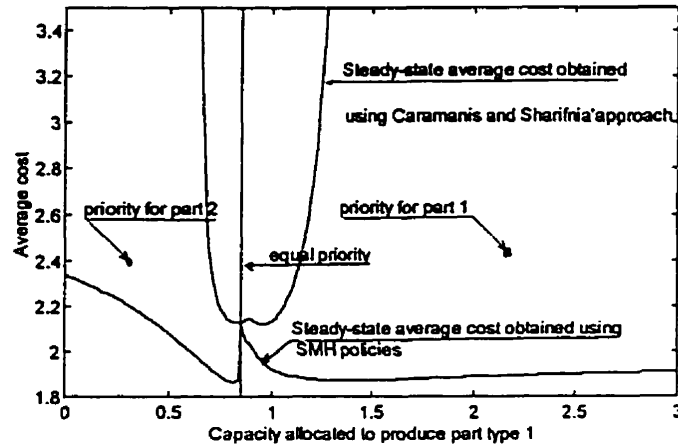


Figure 6: Illustration of the improvements achieved using of SMH policies as compared to completely decoupled inscribed hypercube policies.

Finally Figure 7 illustrates the optimal solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations for the two-part flow control problem presented above. The optimal cost is 20% less than the cost obtained by using totally decoupled inscribed hypercube policies and only 7% less when compared to the cost obtained using the optimal SMH policy. On the other hand, the computational requirements of the HJB solution are very large (and can become quite extensive when dealing with more than two part-types). Also, the HJB solution does not permit the physical insights that the decoupled analysis of SMH policies provide.

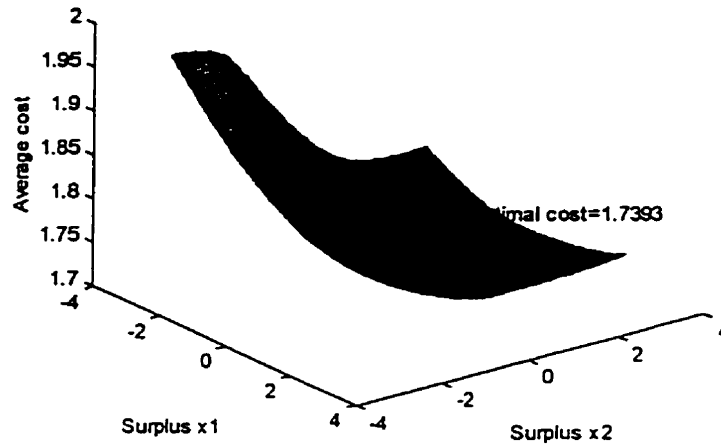


Figure 7: Optimal cost solution of the Dynamic Programming Equation for the two-state two-part sample manufacturing system.

## 9 Conclusion

We have defined a new class of hedging control policies in multi-part failure prone two-state manufacturing systems which we called simple maximal hedging control policies (SMH policies). Much like decoupled capacity set inscribed hypercube policies (Caramanis and Sharifnia 1991) of which they are a generalization, these policies are parameterized by a hedging level along each component, as well as the choice of a point  $c$  at the upper boundary of the production capacity set. These production policies can perform better than inscribed hypercube policies because production if needed always proceeds at maximal capacity. Using first-passage time analysis and Padé approximants, we have shown how a sequential partwise analysis of the performance of SMH policies is possible starting from the high priority part and moving on to the lower priority part. The quality of the approximants for the different costs

involved was demonstrated via Monte-Carlo simulations. Also, an ergodicity analysis indicates that the criterion for the ergodicity of an SMH policy is minimal, i.e. that the rates of demand for parts vector lie inside the mean capacity set. Numerical results for a sample manufacturing system have been presented whereby optimal SMH policies favorably compare with optimal decoupled capacity set inscribed hypercube policies, and perform almost as well as dynamic programming based optimal control policies. Unfortunately, the analysis as presented can only be applied to two-state multi-part systems. In future work, we shall consider extensions to multi-state multi-part manufacturing systems.

## References

1. Baker G. A. JR. 1975. *Essentials of Padé Approximants*. Academic Press.
2. Bielecki T. and Kumar. P. R. 1988. Optimality of Zero-Inventory Policies for Unreliable Manufacturing Systems. *Operat. Res.*, vol. 26:pp. 532-540.
3. Brémaud P., Malhamé R. P. and Massoulié L. Forthcoming. A Manufacturing System with General Stationary Failure Process: Stability and IPA of Hedging Control Policies. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
4. Caramanis M. C. and Sharifnia A. 1991. Near-Optimal Manufacturing Flow Controller Design. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 3(no 4):pp. 321-336.
5. El-férik S. and Malhamé R. P. Submitted. Padé Approximants for the transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
6. Gershwin S. B. 1994. *Manufacturing Systems Engineering*. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
7. Glasserman P. 1995. Hedging-Point Production Control with Multiple Failure Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40(no 4):pp. 707-711.
8. Hu J. Q. and Xiang D. 1995. Monotonicity of Optimal Controls for Failure Prone Production Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 86(no 1):pp. 57-71.
9. Olsder G. J. and Suri R. 1980. Time-Optimal Control of Flexible Manufacturing Systems With Failure Prone Machines. *Proceedings of the 19<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*.

10. Malhamé R. P. 1993. Ergodicity of Hedging Point Policies in Single Part Multiple State Manufacturing Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(no 2):pp. 340–343.
11. Perkins J. R. and Srikant R. 1995. Hedging Policies for Failure-Prone Manufacturing Systems: Optimality of JIT and Bounds on Buffer Levels. *Proceedings of the 34th conference on Decision & Control*, pages pp. 3144–3149, New, Orleans, LA.
12. Sethi S. P. and Zhang Q. 1994. *Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems*. Birkha
13. Sharifnia A. 1988. Production control of Manufacturing System with Multiple Machine States. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-33(no 7):pp. 620–625.
14. Srivatsan N. and Dallery Y. 1994. Partial Characterization of Optimal Policies in Unreliable Multiple-Part-Type Systems. *Technical Report Laboratory for Manufacturing and Productivity LMP94-004*.
15. Wolff. R. W. 1989. *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

## Appendix A

### Proof of Proposition 1

The proof relies on an analysis of the first return time of each part to its own hedging level. Suppose  $j \in D_i(c)$ , for some pair  $i, j \in B$ . Upon leaving  $z$ , surplus levels  $x_i(t)$  and  $x_j(t)$  decay respectively at rates  $d_i, d_j$ , when  $\alpha(t) = 1$ , up until the instant where one of the part surpluses first returns to its associated hedging level. Now suppose that it is part type  $j$  which returns first. Let  $T_{on}$  and  $T_{off}$  be the total time that the surplus for part  $j$  would have spent respectively increasing ( $\alpha = 1$ ) and decreasing ( $\alpha = 0$ ) on its excursion away from and back to  $z_j$ . Then the following equation holds:

$$(u_j^c - d_j)T_{on} = d_j T_{off} \quad (A.1)$$

or equivalently:

$$\frac{(u_j^c - d_j)}{d_j} = \frac{T_{off}}{T_{on}}. \quad (A.2)$$

However, if after  $T_{on} + T_{off}$ , surplus for part  $i$  has not yet reached its associated hedging level, then this would mean:

$$(u_i^c - d_i)T_{on} < d_i T_{off}. \quad (A.3)$$

In this case, (A.2) and (A.3) would yield:

$$\frac{(u_i^c - d_i)}{d_i} < \frac{(u_j^c - d_j)}{d_j} \quad (A.4)$$

But (A.3) is in contradiction with the defining property of  $\Gamma_{ij}$  to which  $c$  belongs. Thus hypothesis (A.1) must be false, and it is surplus for part  $i$  which will return first to  $z_i$  and remain there until mode  $\alpha(t)$  moves back to zero. In the meantime, surplus for part type  $j$  has either already returned to  $z_j$  or has not yet returned. In the former case, using the same arguments as for the first cycle, one could conclude that it is surplus for part  $i$  which will first return to  $z_i$ . In the latter case, the same conclusion holds since surplus for part  $j$  would be starting with a net deficit relative to the

surplus for part  $i$ . Thus a choice of  $i$  is as the higher priority part whenever  $j \in D_i(c)$  will yield a consistent SMH policy. Finally, when situation (b) is encountered, (A.1) can be written for both parts  $i$  and  $j$  and  $x_i(t)$ ,  $x_j(t)$ , leave  $z_i$  and  $z_j$  respectively, simultaneously, and return to  $z_i$  and  $z_j$  simultaneously. ■

## Proof of Lemma 2

Let  $\beta(t)$  be the mode of a two-mode machine with an operational mode ( $\beta = 1$ ) and a failure mode ( $\beta = 0$ ). Let  $t_\ell$  be an arbitrary instant when  $\beta(t)$  switches from 1 to 0.

Define:

$$\begin{aligned} T_{on}(\beta, t_\ell, t) &: \text{the portion of interval } [t_\ell, t], \ t_\ell \leq t, \text{ spent in mode } \beta = 1. \\ T_{on}(\beta, t_\ell, t) &= \int_{t_\ell}^t I_{\{\beta(\tau)=1\}} d\tau. \\ T_{off}(\beta, t_\ell, t) &: \text{the portion of interval } [t_\ell, t], \ t_\ell \leq t, \text{ spent in mode } \beta \neq 1. \\ T_{off}(\beta, t_\ell, t) &= \int_{t_\ell}^t I_{\{\beta(\tau) \neq 1\}} d\tau, \end{aligned}$$

where  $I_{\{\cdot\}}$  is the set indicator function. When  $\beta(t) = \tilde{\alpha}_i(t)$ , Let  $t_\ell + T_{r_i}$  be the instant  $x_i(t)$  first returns to  $z_i$  after just leaving it at time  $t_\ell$ . Over an interval  $[t_\ell, t_\ell + T_{r_i}]$ , since at  $t_\ell$ ,  $\tilde{\alpha}_i(t)$  just switched from mode 1 to mode 0 and thus  $x_i(t_\ell) = \tilde{x}_i(t_\ell)$ , and at  $t_\ell + T_{r_i}$ ,  $\tilde{\alpha}_i(t)$  has switched back to 1 and thus  $x_i(t_\ell + T_{r_i}) = \tilde{x}_i(t_\ell + T_{r_i})$ . the net increments of  $x_i(t)$  and  $\tilde{x}_i(t)$  over  $[t_\ell, t_\ell + T_{r_i}]$  must be equal. Furthermore, since by definition of  $t_\ell$  and  $t_\ell + T_{r_i}$ ,  $x_i(t_\ell) = x_i(t_\ell + T_{r_i}) = z_i$ , the net increments are both zero. Two cases must be distinguished, namely when  $i = 1$  and when  $i \neq 1$ .

- case  $i = 1$ , we have  $\tilde{\alpha}_i(t) = \alpha(t)$ ,  $\tilde{d}_1 = d_1$ ,  $\tilde{v}_{11} = v_{11}$ . Thus  $x_1(t) = \tilde{x}_1(t)$  and  $(\alpha(t), x_1(t))$  is a Markovian two-velocity process. Setting  $\beta(t) = \alpha(t)$  and analyzing the increments of  $x_1(t)$ , one can write:

$$v_{11}T_{on}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell) - d_1T_{off}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell) = 0.$$

This yields:

$$\frac{T_{on}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell)}{T_{off}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell)} = \frac{d_1}{v_{11}}. \quad (\text{A.5})$$

Since  $T_{r_1} = T_{on}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell) + T_{off}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell)$ , (A.5) yields:

$$T_{r_1} = \frac{v_{11}}{v_{11} + d_1} T_{off}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell). \quad (\text{A.6})$$



On the other hand

$$x_2(T_{r_1} + t_\ell) - x_2(t_\ell) = v_{12}T_{on}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell) - d_2T_{off}(\alpha, t_\ell, T_{r_1} + t_\ell), \quad (A.7)$$

thus using (A.5) and (A.6),

$$x_2(T_{r_1} + t_\ell) - x_2(t_\ell) = \frac{v_{11}d_2 - d_1v_{12}}{v_{11} + d_1}T_{r_1}$$

which suggests that while the actual motion of  $x_2(t)$  involves two different velocities  $v_{12}$  and  $-d_2$ , respectively, at least for intervals corresponding to a first return of  $x_1(t)$  to  $z_1$  after leaving  $z_1$ , one obtains the same net increment in  $x_2(t)$  by assuming a *single (average) rate of decrease* defined by:

$$\bar{d}_2 = \frac{v_{11}}{v_{11} + d_1}d_2 - \frac{v_{12}d_1}{v_{11} + d_1}. \quad (A.8)$$

The process which is defined as decreasing at rate  $d_2$  when  $x_1(t) \neq z_1$  ( $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$ ) and which coincides with  $x_2(t)$  when  $x_1(t) = z_1$  ( $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$ ) is called the *biased version of  $x_2(t)$*  and is denoted  $\tilde{x}_2(t)$ . Thus when  $\tilde{\alpha}_2(t) = 1$ ,  $x_2(t) \equiv \tilde{x}_2(t)$ , while for  $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$ ,  $\tilde{x}_2(t)$  decays at velocity  $-\bar{d}_2$ .

- case  $i \geq 2$ , ( $\tilde{\alpha}_i(t) = \alpha(t)$ ), Setting  $\beta(t) = \tilde{\alpha}_i(t)$  and analyzing the increments of  $\tilde{x}_i(t)$ , one can write:

$$\bar{v}_{1i}T_{on}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell) - \bar{d}_iT_{off}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell) = 0$$

which yields

$$\frac{T_{on}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell)}{T_{off}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell)} = \frac{\bar{d}_i}{\bar{v}_{1i}}, \quad (A.9)$$

Recall that  $T_{r_i} = T_{on}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell) + T_{off}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell)$ . (A.9) yields:

$$T_{r_i} = \frac{\bar{v}_{1i}}{\bar{v}_{1i} + \bar{d}_i}T_{off}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell). \quad (A.10)$$

Now, define the intermediary process  $x_{F_{i+1}}(t)$  such when  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$ ,  $x_{F_{i+1}}(t) = x_{i+1}(t)$ , and  $x_{F_{i+1}}(t)$  increases at rate  $v_{1i+1}$  while  $x_{F_{i+1}}(t)$  decreases at constant

rate  $d_{F_{i+1}}$  otherwise. That such process exists can be seen by considering the interval  $[t_\ell, t_\ell + T_d]$  where  $t_\ell + T_d$  is the first time  $\tilde{\alpha}_i(t)$  returns to mode one after leaving it at time  $t_\ell$ . By definition of the  $\tilde{x}_i(t)$  process, the net decreases of  $\tilde{x}_i(t)$  and  $x_i(t)$  over  $[t_\ell, t_\ell + T_d]$  are equal and:

$$-\tilde{d}_i T_d = -d_i T_{off}(\alpha, t_\ell, T_d + t_\ell) + v_{1i} T_{on}(\alpha, t_\ell, T_d + t_\ell), \quad (A.11)$$

(A.11) yields if we recall that  $T_d$  is the sum of the two time variables on the right-hand side of (A.11):

$$\frac{T_{off}(\alpha, t_\ell, T_d + t_\ell)}{T_d} = 1 - \frac{T_{on}(\alpha, t_\ell, T_d + t_\ell)}{T_d} = \frac{v_{1i} + \tilde{d}_i}{v_{1i} + d_i}. \quad (A.12)$$

$d_{F_{i+1}}$  can now be obtained by recognizing that it would be the rate of decrease of  $\tilde{x}_i(t)$  if the nominal production rate and the demand rate for part  $i$  were respectively replaced by the nominal production rate and the demand rate for part type  $i + 1$ . In this case an equation equivalent to (A.11) would be satisfied:

$$-d_{F_{i+1}} T_d = -d_{i+1} T_{off}(\alpha, t_\ell, T_d + t_\ell) + v_{1i+1} T_{on}(\alpha, t_\ell, T_d + t_\ell). \quad (A.13)$$

(A.12) and (A.13) yield after dividing (A.13) by  $T_d$ :

$$d_{F_{i+1}} = \frac{(v_{1i} + \tilde{d}_i)}{v_{1i} + d_i} d_{i+1} - \frac{v_{1i+1}}{v_{1i} + d_i} (d_i - \tilde{d}_i). \quad (A.14)$$

This shows that if one attributes to  $x_{F_{i+1}}(t)$  velocity  $-d_{F_{i+1}}$  as given by (A.14), the constraint  $x_{F_{i+1}}(t) = x_{i+1}(t)$  is satisfied both at  $t_\ell$  and  $t_\ell + T_d$ . On the other hand,  $x_{F_{i+1}}(T_{r_i} + t_\ell) - x_{F_{i+1}}(t_\ell) = x_{i+1}(T_{r_i} + t_\ell) - x_{i+1}(t_\ell)$  and

$$x_{F_{i+1}}(T_{r_i} + t_\ell) - x_{F_{i+1}}(t_\ell) = v_{1i+1} T_{on}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell) - d_{F_{i+1}} T_{off}(\tilde{\alpha}_i, t_\ell, T_{r_i} + t_\ell),$$

thus using (A.9) and (A.10),

$$x_{i+1}(T_{r_i} + t_\ell) - x_{i+1}(t_\ell) = \frac{v_{1i+1} \tilde{d}_i - d_{F_{i+1}} \tilde{v}_{1i}}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i} T_{r_i}$$

which suggests that while the actual motion of  $x_{i+1}(t)$  as well as  $x_{F_{i+1}}(t)$  involves two different velocities ( $v_{1i+1}$ ,  $-d_{i+1}$ , and  $v_{1i+1}$ ,  $-d_{F_{i+1}}$  respectively), at least for intervals corresponding to a first return of  $\tilde{x}_i(t)$  (or  $x_i(t)$ ) to  $z_i$  after leaving  $z_i$ , one obtains the same net increment in  $x_{i+1}(t)$  by assuming a single (average) rate of decrease defined by:

$$\tilde{d}_{i+1} = \frac{\tilde{v}_{1i}}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i} d_{F_{i+1}} - \frac{v_{1i+1} \tilde{d}_i}{\tilde{v}_{1i} + \tilde{d}_i}. \quad (\text{A.15})$$

The process which is defined as decreasing at rate  $\tilde{d}_{i+1}$  when  $x_i(t) \neq z_i$  ( $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 0$ ) and which coincides with  $x_{F_{i+1}}(t)$  and  $x_{i+1}(t)$  when  $x_i(t) = z_i$  ( $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$ ) is called the biased version of  $x_{i+1}(t)$  and is denoted by  $\tilde{x}_{i+1}(t)$ . Thus when  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$ ,  $x_{i+1}(t) \equiv \tilde{x}_{i+1}(t)$ , while for  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 0$ ,  $\tilde{x}_{i+1}(t)$  decays at velocity  $-\tilde{d}_{i+1}$ .

We now establish inequality (21) for the biased version of  $x_{i+1}(t)$ . We observe from (A.8), that  $\tilde{d}_2 = d_2$  if and only if  $v_{12} = u_{12}^c - d_2 = -d_2$  which means that all the available capacity is dedicated to part type 1. Consequently (since  $x_2(t)$  is always decreasing at rate  $d_2$  until  $x_1(t)$  hits  $z_1$ ),  $\tilde{x}_2(t) = x_2(t)$  while  $\tilde{\alpha}_2(t) = 0$ . However, if  $v_{12} \neq -d_2$ ,  $\tilde{d}_2 < d_2$  and  $\tilde{x}_2(t) > x_2(t)$  as long as  $\tilde{\alpha}_2(t^-) \neq 1$  and  $\tilde{\alpha}_2(t^+) \neq 1$ . To see this, suppose that there exists a duration  $t_1 < t_\ell + T_{r_1}$  such that from  $t_\ell$ ,  $t_\ell + T_{r_1}$  the net increments of  $\tilde{x}_2(t)$  and  $x_2(t)$  are equal. Thus, (A.7) and  $\tilde{x}_2(t_1 + t_\ell) - \tilde{x}_2(t_\ell) = -\tilde{d}_2 t_1$  yield:

$$\frac{T_{on}(\alpha, t_\ell, t_1 + t_\ell)}{T_{off}(\alpha, t_\ell, t_1 + t_\ell)} = \frac{d_2 - \tilde{d}_2}{v_{12} + \tilde{d}_2}, \quad (\text{A.16})$$

using (A.8), we have

$$\frac{T_{on}(\alpha, t_\ell, t_1 + t_\ell)}{T_{off}(\alpha, t_\ell, t_1 + t_\ell)} = \frac{d_1}{v_{11}}, \quad (\text{A.17})$$

which simply asserts that the net increments of  $x_1(t)$ , from  $t_\ell$ ,  $t_\ell + T_{r_1}$ , is zero and consequently  $t_1 = T_{r_1}$ , which is a contradiction. Further, since  $\tilde{x}_2(t_\ell) = x_2(t_\ell)$  and  $\tilde{d}_2 < d_2$ , then  $\tilde{x}_2(t) > x_2(t)$  as long as  $\tilde{\alpha}_2(t^-) \neq 1$  and  $\tilde{\alpha}_2(t^+) \neq 1$ .

Now for  $i \geq 2$ , when  $\tilde{d}_i = d_i$  or  $v_{1i+1} = -d_{i+1}$  (which asserts that the total capacity is dedicated to part type  $i$ ), (A.14) and (A.15) give

$$\tilde{d}_{i+1} = d_{F_{i+1}} = d_{i+1}, \quad (\text{A.18})$$

in which case  $x_{i+1}(t) \equiv \tilde{x}_{i+1}(t) \equiv x_{F_{i+1}}(t)$  while  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 0$ . However, if  $\tilde{d}_i < d_i$  and  $v_{1i+1} \neq -d_{i+1}$ , (A.14) and (A.15) yield :

$$\tilde{d}_{i+1} < d_{F_{i+1}} < d_{i+1} \quad . \quad (\text{A.19})$$

and consequently,  $\tilde{x}_{i+1}(t) > x_{i+1}(t)$  as long as  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^-) \neq 1$  and  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^+) \neq 1$ . This can be proven using arguments similar to those for the case  $i = 1$ . We sketch here the different steps. In the first step we show that given  $d_{F_{i+1}} < d_{i+1}$ ,  $x_{F_{i+1}}(t) > x_{i+1}(t)$  as long as  $\tilde{\alpha}_i(t^-) \neq 1$  and  $\tilde{\alpha}_i(t^+) \neq 1$ . In the second step we show that given  $\tilde{d}_{i+1} < d_{F_{i+1}}$ ,  $\tilde{x}_{i+1}(t) > x_{F_{i+1}}(t)$  as long as  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^-) \neq 1$  and  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^+) \neq 1$ . Finally since by construction,  $\tilde{x}_{i+1}(t) \equiv x_{F_{i+1}}(t)$  whenever  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^+) = 1$  and that consistency of SMH policies implies that  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = 1$  only if  $\tilde{\alpha}_i(t) = 1$  (in which case  $x_{i+1}(t) \equiv \tilde{x}_{i+1}(t)$ ), we conclude that  $\tilde{x}_{i+1}(t) > x_{i+1}(t)$  as long as  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^-) \neq 1$  and  $\tilde{\alpha}_{i+1}(t^+) \neq 1$ . ■

### Proof of Lemma 3

Under the ergodicity condition ( $d \in E[\Omega_1]$ ),  $\tilde{\alpha}_i(t)$  is an ergodic alternating renewal process with a failure mode and an operational mode. During the operational mode the process  $\tilde{x}_i(t) \equiv x_i(t)$  and consequently the steady-state p.d.f.  $\tilde{f}_1(\tilde{x}_i)$  is identical to  $f_1(x_i)$ . However, during the failure mode,  $\tilde{x}_i(t) > x_i(t)$ . Thus, in order to recover  $f_0(x_i)$ , one must correct for the bias of  $\tilde{x}_i(t)$  itself described by  $\tilde{f}_0(\tilde{x}_i)$ . In the sequel an expression for the p.d.f. of  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i)$ , is derived, using Lemma 1 and Theorem 1. Indeed, if one focuses on the off portions of the  $\tilde{\alpha}_i(t)$  renewal process, and using the assumed ergodicity of that process, a sample path based estimate of p.d.f.  $\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i)$  can be written as follows:

$$\tilde{f}(\varepsilon) d\varepsilon_i = E \left[ I_{\{\varepsilon_i \in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon_i]\}} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t I_{\{\varepsilon_i \in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon_i]\}} dt, \quad (\text{A.20})$$

where the averaging in the right-hand side of (A.20) is considered only over the off part of the  $\tilde{\alpha}_i(t)$  renewal cycles (See Fig. (4)). Now given that at the beginning of the off portion of a given renewal cycle of  $\tilde{\alpha}_i(t)$ ,  $\varepsilon_i(t) = 0$ , and otherwise  $\varepsilon_i(t)$  evolves in a manner identical to and independent of the off portions of the other renewal cycles, the process in Fig. (4) is itself a regenerative process. Consequently, from the Key Renewal Theorem (Wolff 1989):

$$E \left[ I_{\{\varepsilon_i \in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon_i]\}} \right] = \frac{E \int_0^{T_{r_i-1}} I_{\{\varepsilon_i \in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon_i]\}} dt}{E [T_{r_i-1}]}. \quad (\text{A.21})$$

Applying Theorem 1 to the dynamics of  $\varepsilon_i(t)$ , with an absorbing boundary condition set up at  $\varepsilon_i(t) = 0$ , yields:

$$E \int_0^{T_{r_i-1}} I_{\{\varepsilon_i \in [\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon_i]\}} dt = \int_0^\infty f(\varepsilon, t) d\varepsilon dt. \quad (\text{A.22})$$

where  $f(\varepsilon, t)$  is given by Theorem 1. In fact, denoting by  $F(\varepsilon, s)$  the Laplace transform of  $f(\varepsilon, t)$ , yields, using (A.20), (A.21), (A.22):

$$\tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon) = \frac{F(\varepsilon, s)|_{s=0}}{E [T_{r_i-1}]}. \quad (\text{A.23})$$

Equations (25) and (26) derive directly from Theorem 1 ( derivatives of Laplace Transforms of first return time densities evaluated at  $s = 0$ ). and in turn (A.23) also derives from Theorem 1.

Considering now that for  $\tilde{\alpha}_i(t) = 0$ :

$$x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - \varepsilon_i(t), \quad (\text{A.24})$$

if one notices that the motion of  $\tilde{x}_i(t)$  is strictly deterministic on the interval  $[0, T_r]$ , then  $\varepsilon_i(t)$  as an excursion random variable is *independent* of  $\tilde{x}_i(t)$ , so that one obtains for the corrected steady-state p.d.f. of the hybrid process ( $x_i, \tilde{\alpha}_i = 0$ ):

$$f_0(x_i) = \int_0^{x_i} \tilde{f}_0(x_i - \varepsilon) \tilde{f}_{\varepsilon_i}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (\text{A.25})$$

with  $\tilde{f}_0(x_i - \varepsilon) = \sum_{l=2}^{q_i+1} \tilde{f}_{Ml}(x_i - \varepsilon)$ . ■

## Proof of Proposition 4

The proof utilizes the same arguments presented in the proof of the ergodicity criteria. Indeed given that under SMH policies the capacity of the system is always fully utilized whenever one part is away from its associated hedging point, then all the policies described by hypercubes defined by  $c \in \partial\Omega_1$  generate trajectories that return to their corresponding hedging point in *exactly the same time* (Srivatsan and Dallery 1994) given the same  $\alpha(t)$  process sample path. This means that the first return time of the lowest priority part type,  $p$  in our case, is constant and hence independent of the choice of the nominal vector  $u_1^c$  for a particular  $c \in \partial\Omega_1$ . Consequently, the sojourn time of  $x_p(t)$  at its hedging level  $z_p$  is also constant and independent of the choice of  $u_1^c$ . Also, recall that under the consistency condition of the SMH policy  $x_i(t)$  cannot reach its own hedging level unless all the other part types,  $1, \dots, i-1$ , just reach or are already at their respective hedging levels. Thus, the sojourn times at the hedging levels  $z_i$  and consequently the probability  $P[x_i = z_i]$ , satisfy the following inequalities

$$P[x_1 = z_1] \geq P[x_2 = z_2] \geq \dots \geq P[x_p = z_p] \quad (\text{A.26})$$

Since  $c_0^* \in \partial\Omega_1$ , then the constant probability  $P[x_p = z_p]$  can be computed from the lowest priority part using  $u_1^{c_0^*}$ . Recall that under  $c_0^*$  *all the parts have the same priorities*, reach their respective hedging levels at the same time. and consequently have the same probability to be at their associated hedging level. This means that

$$P[x_p = z_p] = P[x_1 = z_1] = \frac{\pi_{11}u_{11}^{c_0^*} - d_1}{(u_{11}^{c_0^*} - d_1)} \quad (\text{A.27})$$

Consequently, using (37), (A.26) and (A.27), (41) and (43) can be obtained. ■

## CHAPITRE VI

# CONCLUSION

L'atelier de fabrication flexible représente de par sa flexibilité un outil de plus en plus attrayant et indispensable pour demeurer compétitif sur un marché libre. L'objectif est de satisfaire une demande, qui peut varier dans le temps, tout en réduisant le niveau de surplus de production. Cette tâche est rendue difficile par la présence d'aléas, en particulier les pannes de machines. Nous avons passé en revue, les travaux de recherches existants en rapport plus ou moins étroit avec nos travaux. Nous avons pu constater que le segment de la littérature scientifique auquel se rattachent directement les travaux de recherche dans cette thèse présente plusieurs limitations. Une des limitations vient du fait que l'on met énormément d'emphasis sur la caractérisation de la solution optimale en régime stationnaire par rapport à l'analyse et la caractérisation de la solution transitoire (sur horizon fini). La raison sous-jacente à ce manque d'information est la difficulté maintes fois exprimée de traiter ces questions. Suite à ces constatations nous avons entrepris dans cette thèse de répondre aux questions suivantes:

- Quelle doit être la plus petite valeur de la longueur de l'horizon  $T$  à partir de laquelle on peut utiliser avec un certain degré de confiance la politique optimale stationnaire (dont la structure est bien connue)?
- Pour la classe de politique à seuils critiques *invariants*, comment peut-on optimiser les seuils critiques d'inventaire sur un horizon fini et comment sont-ils affectés par la longueur de l'intervalle d'optimisation?
- Dans le cas d'un atelier de fabrication flexible produisant plusieurs types de pièces, comment peut-on améliorer le contrôleur sous-optimal de Caramanis et Sharifnia ?

Dans le chapitre II, nous avons présenté les différentes notions et définitions relatives à l'atelier de fabrication flexible. Nous avons pu remarquer que le contrôle de flux représente une phase importante dans une structure de contrôle spécifiquement conçue pour répondre à l'explosion de complexité provenant de la prise en compte dans l'analyse des pannes des machines [7]. Le but est de déterminer des taux de production moyens à court terme, en anticipant dans un sens statistique les différents modes du système de production et en respectant la capacité disponible dans chaque mode. Un important concept émerge des travaux de Kimemia et Gershwin [7], celui d'un point critique associé à chaque mode faisable. La politique optimale, sur horizon infini, serait d'atteindre ce point le plus rapidement possible et d'y demeurer tant que possible.

Au chapitre III, les résultats dans [17] et [10] qui constituent pour cette thèse un point de départ essentiel, ont été présentés. Une estimation d'une borne supérieure du temps moyen de convergence des coûts vers le régime stationnaire a été proposée. Cette borne supérieure possède le désavantage d'être uniquement une borne sur la moyenne du temps de convergence et pourrait perdre son intérêt si la variance du temps de convergence est élevée.

Le chapitre IV constitue une réponse aux deux premières questions posées ci-dessus. Nous avons considéré le problème d'optimisation du contrôle de flux sur un horizon fini, pour un système multi-mode et produisant un seul type de pièces. La classe (sous-optimale) des lois de production considérées est caractérisée par des points critiques invariants à l'intérieur de l'horizon d'optimisation. Une équation de renouvellement pour la fonctionnelle coût sur horizon fini a été développée et utilisée pour générer les coefficients d'une expansion en série infinie de la transformée de Laplace du coût vu comme fonction de la longueur de l'horizon  $T$ .

Le calcul des coefficients dans la série infinie est basé sur une résolution d'un système d'équations différentielles récursives. Les coefficients dépendent du choix particulier des seuils critiques d'inventaires et sont utilisés pour obtenir une approximation de la fonctionnelle coût comme somme de fonction exponentielles.



L'optimisation du choix des seuils critiques procède par la suite numériquement.

L'application des approximants de Padé donne d'excellents résultats numériques et nous a permis d'estimer correctement le coût même pour des longueurs d'horizons de temps faibles. La validation des approximants de Padé a été possible par comparaison avec les résultats numériques obtenus par résolution directe du système d'équations aux dérivées partielles donné au théorème 3.1 basé sur la méthode de Lax-Wendroff [30] pour des points critiques fixés.

L'estimation du temps de convergence vers le régime stationnaire a été possible par l'analyse des singularités de la transformée de Laplace de la fonctionnelle coût. Le résultat nous donne un critère d'estimation de la longueur minimale d'horizon requise pour garantir un pourcentage d'erreur maximal en fonction du pourcentage d'erreur par rapport au coût en régime stationnaire.

Le chapitre VI présente une réponse partielle à la troisième question. Nous avons considéré le problème de contrôle de flux d'un atelier de fabrication flexible à deux états et produisant plusieurs types de pièces. Nous avons défini une nouvelle classe de politiques à seuils critiques appelée politiques maximales simples à points critiques (politiques MSP). Tout comme les politiques caractérisées par des hypercubes souscrits proposées par Caramanis et Sharifnia [9], ces politiques sont fonctions du seuil critique le long de chaque composante ainsi que le choix du point  $c$  à la frontière supérieure de  $\Omega_1$ , l'espace de capacité dans le mode opérationnel. Ces politiques de production peuvent avoir des performances meilleures que celles des politiques de Caramanis et Sharifnia vu le découplage de lois de production pour chaque type de pièces. Ceci est dû au fait que la production est toujours menée en exploitant la capacité maximale du système. En utilisant l'analyse de premier temps de passage, ainsi que les approximants de Padé, nous avons montré comment une analyse séquentielle des performances des politiques MSP est possible en commençant par la pièce ayant la priorité la plus élevée jusqu'à celle ayant la priorité la plus faible. De plus, nous avons vu également établi que le critère d'ergodicité pour le cas multi-pièce est minimal, i.e., le taux de demande des pièces

se trouve à l'intérieur de l'espace de capacité moyen. Enfin, nous avons développé des conditions nécessaires ainsi que des conditions suffisantes pour l'optimalité du point critique global nul.

Au tableau des limitations de résultats, il est à souligner que l'analyse multi-pièce telle que présentée n'est valide que pour un système à deux modes seulement produisant plusieurs types de pièces. Cependant, L'amélioration apportée par l'utilisation des politiques MSP telle que présentée est restreinte aux systèmes à deux modes sur horizon infini. Deux généralisations possibles de nos travaux pourraient donc être considérées: d'une part, horizon infini et systèmes multi-mode produisant plusieurs types de pièces, et d'autre part systèmes à deux modes produisant plusieurs types de pièces sur horizon fini. La généralisation pour les systèmes multi-modes, horizon infini, présente quelques difficultés dans la détermination des versions biaisées des processus d'inventaire. Pour mieux saisir cette difficulté, considérons l'exemple suivant: Soit un système pouvant être dans trois modes et produisant deux types de pièces. Définissons,  $\{\chi_i^k\}$ , les séquences de variables aléatoires représentant les durées de séjours successives dans les modes  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Soit  $v_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les vitesses de production de la pièce  $j = 1, 2$ , dans mode  $i$  et soit  $m = 2$  le nombre d'états faisables. Nous avons donc deux points critiques  $z_1, z_2$ . Supposons  $z_1 > z_2$  avec  $z_i = [z_{1i}, z_{2i}]$ ,  $i = 1, 2$ . Le premier problème provient de la difficulté de définir une politique MSP consistante. En effet supposons que les taux de production soient choisis dans chaque mode faisable selon les règles dictées par la proposition 5.1 de manière à donner la priorité la plus élevée à la pièce 1. Supposons qu'à un instant  $t$  quelconque où  $x_1(t) > z_{12}$ , le mode du système saute à l'état 2 et que par conséquent, selon la politique à point critique, le taux de production de la pièce 1 doive être mis à zéro. La pièce 2 jouit alors de la capacité maximale de production (puisque c'est une politique MSP). Ceci fait en sorte que la probabilité que  $x_2(t)$  atteigne  $z_{22}$  avant que  $x_1(t)$  atteigne  $z_{12}$  est non nulle et la consistance n'est plus respectée. Il serait intéressant de voir dans un travail futur si nous pouvons contourner cette difficulté en commutant les vitesses de production non pas au point critique de la pièce prioritaire mais par rapport à

une courbe de commutation plus générale,  $f(x_1, x_2)$ .

La deuxième généralisation possible consiste à considérer le cas à deux modes multi-pièce sur un horizon fini. Il est à noter que si l'on ne s'en tenait qu'aux versions biaisées des processus, l'analyse transitoire du cas mono-pièce multi-mode pourrait être intégralement reproduite. La difficulté principale provient principalement de la contribution du terme d'erreur  $\tilde{f}(\varepsilon)$  au lemme 5.2. Nous pensons qu'il est possible de développer pour le cas sur horizon fini des équations de renouvellement spécifiques au terme. Ce qui pourrait être là une voie de recherches futures prometteuses.

Finalement, dans cette thèse, la nature des phénomènes considérés se résume à la production des pièces et aux pannes aléatoires des machines. Des aspects tels que la maintenance préventive, le vieillissement des machines et son effet sur les taux de pannes des machines, de même le caractère à l'occasion non négligeable des temps de reconfiguration des machines n'ont pas été abordés. Certains de ces outils développés dans cette thèse pourraient constituer un bon point de départ pour la prise en compte de tels aspects.

## RÉFÉRENCES

- [1] P. ALGOET. "Flow Balance Equations for the Steady-State Distribution of a Flexible Manufacturing Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-34:pp. 917-921, juillet 1989.
- [2] B. VAN DER POL et H. BREMMER. "Operational Calculus Based on the Two Sided Laplace Integral". *The Sybdics of the Cambrige University Press*, New York, 1964.
- [3] G. A. BAKER. JR. "Essentials of Padé Approximants." *Academic Press*, 1975.
- [4] G. J. OLSDER et R. SURI. "Time-Optimal Control of Flexible Manufacturing Systems With Failure Prone Machines." *Proceedings of the 19<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, décembre 1980.
- [5] G. LIBEROPOULOS et J. HU. "On the Ordering of Optimal Hedging Points in a Class of Manufacturing Flow Control Models." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-:pp. 11-40, juillet 1994.
- [6] G. SANSONE et J. GERRETSEN. "Lectures of the Theory of Functions of Complex Variables." *Wolters-Noordhoff Publishing Groningen*, The Netherlands, 1969.
- [7] J. B. KIMEMIA et S. B. GERSHWIN. "An Algorithm for the Computer Control of Production in Flexible Manufacturing Systems." *IIE Transactions*, vol. 15(no 4):pp. 353-362, décembre 1983.

- [8] J. TSITSIKLIS. "Convexity and Characterisation of Optimal Policies in a Dynamic Routing Problem." *Journal of optimization theory*, 44(no 1):pp. 105–135, 1984.
- [9] M. C. CARAMANIS et A. SHARIFNIA. "Near-Optimal Manufacturing Flow Controller Design." *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 3(no 4):pp. 321–336, 1991.
- [10] R. P. MALHAMÉ. "Ergodicity of Hedging Point Policies in Single Part Multiple State Manufacturing Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(no 2):pp. 340–343, février 1993.
- [11] N. SRIVATSAN et Y. DALLERY. "Partial Characterization of Optimal Policies in Unreliable Multiple-Part-Type Systems." *rapport technique Laboratory for Manufacturing and Productivity LMP94-004*, 1994.
- [12] P. ALGOET. "Flow Balance Equations for the Steady-State Distribution of a Flexible Manufacturing System." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:pp. 917–921, juillet 1989.
- [13] P. BRÉMAUD, R. P. MALHAMÉ et L. MASSOULIÉ . "A Manufacturing System with General Stationary Failure Process: Stability and IPA of Hedging Control Policies.." *à paraître dans IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [14] P. GLASSERMAN. "Hedging-Point Production Control with Multiple Failure Modes." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40(no 4):pp. 707–711, avril 1995.

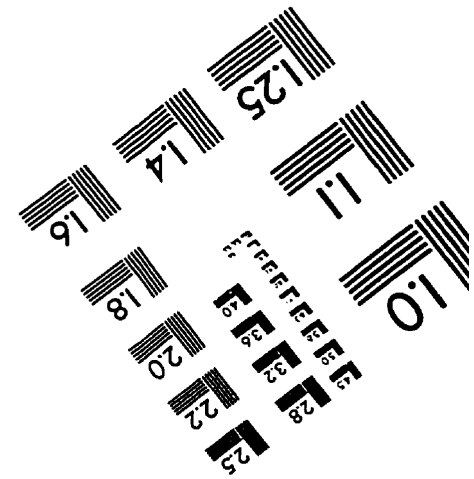
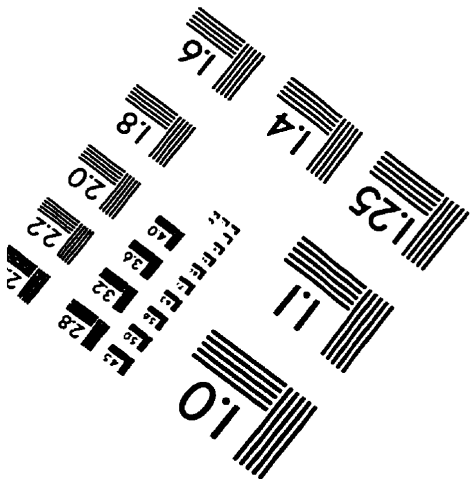
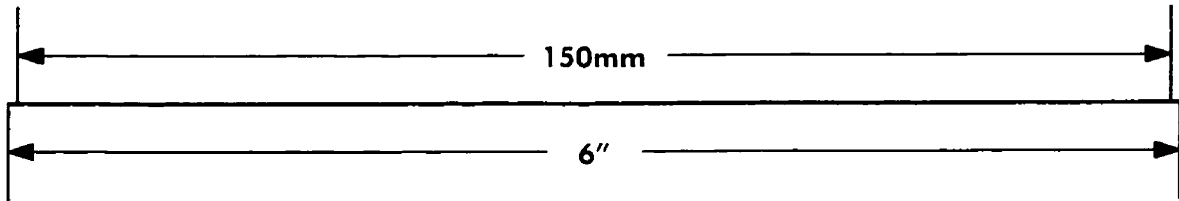
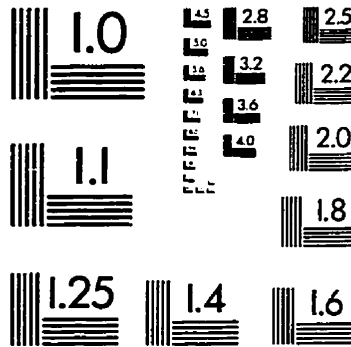
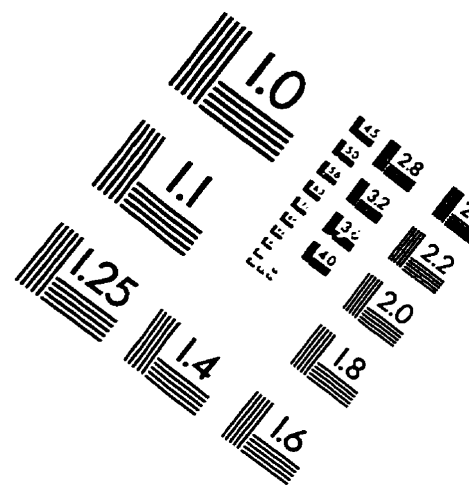
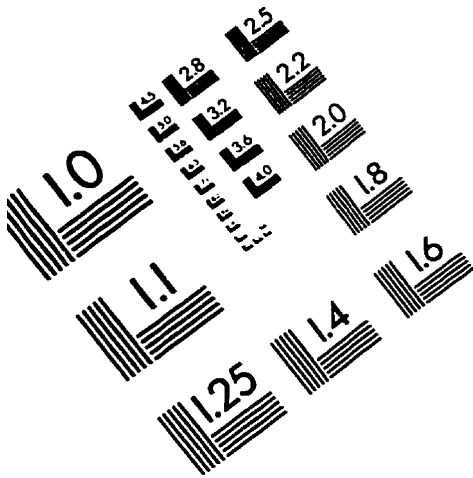
- [15] Q. ZHANG et G. YIN. "Turnpike Sets in Stochastic Manufacturing Systems with Finite Time Horizon." *Stochastics and stochastics reports*, vol.51:pp. 11–40, juillet 1994.
- [16] R. AKELLA et P. R. KUMAR. "Optimal Control of Production Rate in a failure Prone Manufacturing System." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31:pp.116–126, février 1986.
- [17] R. P. MALHAMÉ et E. K. BOUKAS. "A Markov Renewal Analysis of the Production Control of a Flexible Manufacturing System Under Hedging Point Policies." *GERAD Report*, G89-37, novembre 1981.
- [18] R. P. MALHAMÉ et E. K. BOUKAS. "Transient and Steady-State of the Statistical Flow Balance Equations in Manufacturing Systems." *Elsevier Science Publisher B. V.*, pages pp. 339–345, 1989.
- [19] R. P. MALHAMÉ et E. K. BOUKAS. "A Renewal Theoretic Analysis of a Class of Manufacturing Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-36(no 5):pp. 353–362, mai 1991.
- [20] R. P. MALHAMÉ, E. K. BOUKAS et S. EL-FÉRIK. "Transient Analysis of the Dynamics of a Manufacturing System: A Case Study ." *IFAC. INCOM'92*, II:pp. 654–657, mai 1992.
- [21] R. RISHEL. "Dynamic Programming and Minimum principles for Systems with Jump Markov Disturbances." *SIAM Journal on control*, 13:pp. 338–371, février 1975.

- [22] S. B. GERSHWIN. "Manufacturing Systems Engineering." *PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs*, New Jersey, 1994.
- [23] S. EL-FÉRIK et R. P. MALHAMÉ. "Padé Approximants for the transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing ." *Soumis pour publication dans IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [24] S. P. SETHI et Q. ZHANG. "Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems." *Birkhauser*, Boston, 1994.
- [25] A. SHARIFNIA. "Production control of Manufacturing System with Multiple Machine States." *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-33(no 7):pp. 620-625, juillet 1988.
- [26] D. L. SNYDER. "Random Point Processes." New York, Wiley, 1975.
- [27] T. BIELECKI et P. R. KUMAR. "Optimality of Zero-Inventory Policies for Unreliable Manufacturing Systems." *Operations Research*, vol. 26:pp. 532-540, juillet-août. 1988.
- [28] E. ÇINLAR "Markov Renewal Theory." *Adv. Appl. Prob.*, vol. 1:pp. 123-187, 1969.
- [29] H. YAN et Q. ZHANG. "A Numerical Method in Optimal Production and Setup Scheduling of Stochastic Manufacturing Systems." *à paraître*.

- [30] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY et W. T. VETTERLING. "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing." *Cambridge University, Press*, 1988.
- [31] M. H. A. DAVIS. "Piecewise-deterministic Markov Processes: A General Class of Non-diffusion Stochastic Models." *Journal of Royal Statistical Society* vol.46, No.3 :pp. 335—388, 1984.
- [32] R. W. Wolff. "Stochastic Modeling and the Theory of Queues." *Prentice-hall International Series in Industrial and Systems Engineering*, 1989.
- [33] B. GAVISH et S. C. GRAVES "A One-Production/Inventory Problem under Continuous Review Policy." *Operations Research*, vol. 28, pp.1228-1236, 1980.
- [34] S. C. GRAVES "The Multi-Product Production Cycling Problem." *AIIE Transactions*, vol. 12, pp.67-101, 1988.
- [35] U. S. KARMAKAR, S. KEKRE et S. KEKRE "Multi-item Batching Heuristics for Minimization of Queueing Delay." *European Journal of Operational Research*, vol. 58, pp.99-111, 1992.
- [36] J. QIU et R. LOULOU "Multi-Product Production/Inventory Control under Random Demands." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, No 2 pp.350-355, 1994.



# TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc.  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved